

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC HÀ NỘI

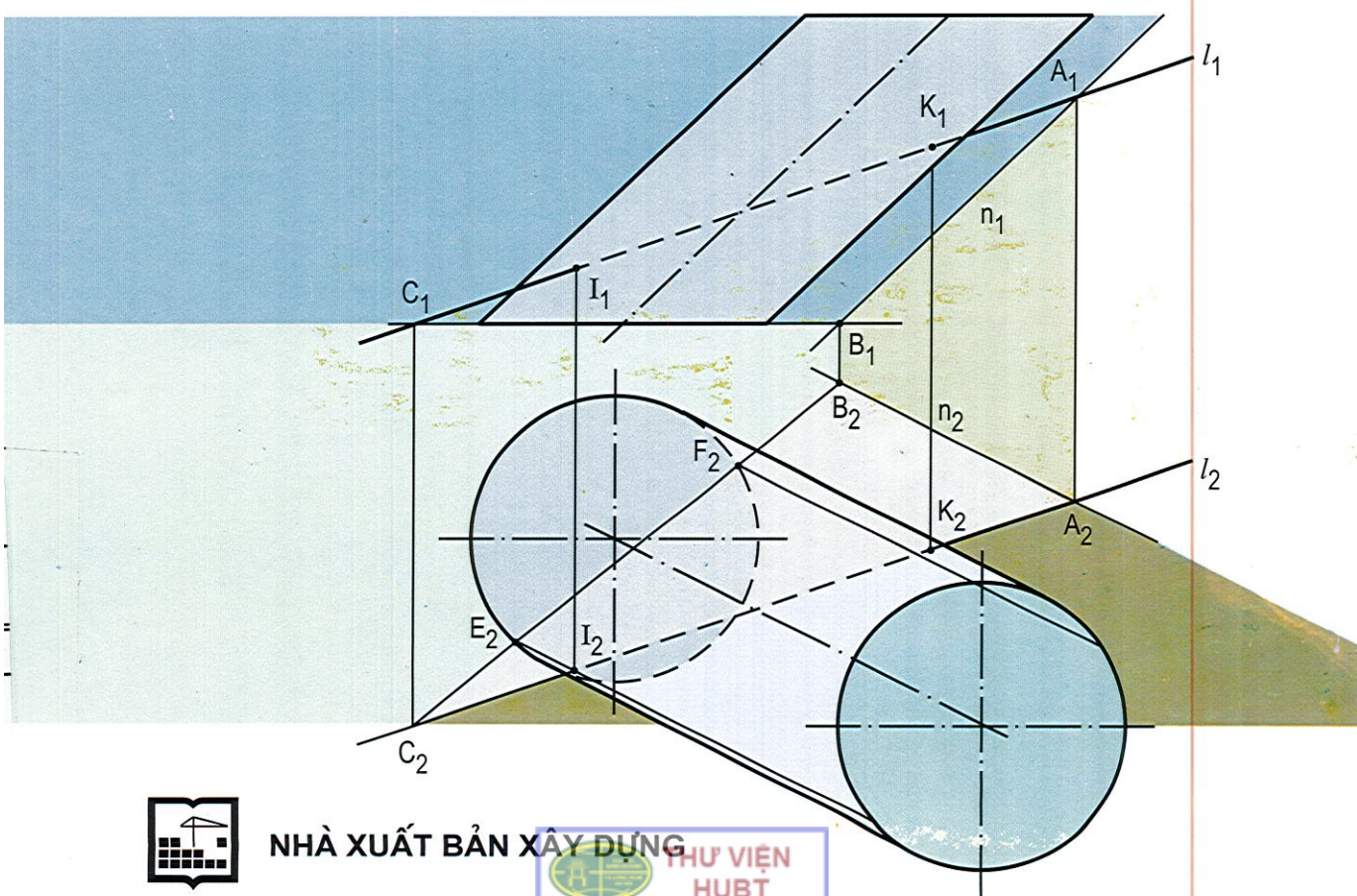
ĐÀO TIỆP (Chủ biên)

BÙI XUÂN THÌN - TÔ NGỌC HẢI

ĐÀO ĐỨC THIÊN - LÊ HƯƠNG GIANG

HÌNH HỌC HỌA HÌNH

PHƯƠNG PHÁP HÌNH CHIẾU THẲNG GÓC



NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG

THƯ VIỆN
HUBT

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ



**THƯ VIỆN
HUBT**

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC HÀ NỘI
ĐÀO TIỆP (Chủ biên)
BÙI XUÂN THÌN - TÔ NGỌC HẢI
ĐÀO ĐỨC THIỆN - LÊ HƯƠNG GIANG

HÌNH HỌC HỌA HÌNH

PHƯƠNG PHÁP HÌNH CHIẾU THẲNG GÓC

(Tái bản)

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG
HÀ NỘI - 2012



TRƯỜNG ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC HÀ NỘI
ĐẠO TIẾP (Chữ in)
BÙI XUÂN THỊN - TÔ NGỌC HẢI
ĐẠO ĐỨC THIÊN - LÊ HƯƠNG GIANG

HÌNH HỌC HÌNH

PHƯƠNG PHÁP HÌNH CHIẾU THẲNG GÓC

(Tài liệu)

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC HÀ NỘI
THƯ VIỆN

PHÒNG XÂY DỰNG



THƯ VIỆN
HUBT

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

LỜI NÓI ĐẦU

Thực hiện chủ trương đổi mới đào tạo đại học; Bộ môn Hình học hoạ hình của Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội biên soạn cuốn “Hình học hoạ hình” này nhằm đáp ứng nhu cầu chung của sinh viên các ngành, các hệ đang được đào tạo tại trường.

Cuốn sách được biên soạn ngắn gọn, có đầy đủ nội dung cơ bản của phương pháp hình chiếu thẳng góc; được giảng dạy cho sinh viên các ngành kỹ thuật mà thời lượng lên lớp hầu hết đã rút ngắn.

Nội dung cuốn sách gồm bài mở đầu và 5 chương:

Bài mở đầu: Trình bày các kiến thức cơ bản của phép chiếu

Chương 1: Biểu diễn các yếu tố hình học cơ bản

Chương 2: Các bài toán cơ bản

Chương 3: Các phép biến đổi hình chiếu

Chương 4: Đa diện

Chương 5: Mặt cong

Cuối cùng là một số bài tập thực hành

Trong quá trình biên soạn chúng tôi đã nhận được nhiều ý kiến đóng góp của các đồng nghiệp trong và ngoài trường.

Chúng tôi mong nhận được những nhận xét, góp ý của bạn đọc để cuốn sách ngày một phù hợp và hoàn chỉnh hơn.

Các tác giả

CÁC KÝ HIỆU DÙNG TRONG SÁCH

Các mặt phẳng hình chiếu:

- Mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathcal{P}_1$
- Mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}_2$
- Mặt phẳng hình chiếu cạnh $\mathcal{P}_3$

Các trục hình chiếu: x, y, z

Các điểm: $A, B, C, \dots$ hoặc $1, 2, 3, \dots$

Các đường (thẳng hoặc cong): $a, b, c, \dots$

Các mặt phẳng: $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$

Các mặt cong: Σ, Ω, Φ

Các góc: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

- Hình chiếu đứng: dùng chỉ số 1.

Thí dụ: $A_1, B_1, C_1, \dots; a_1, b_1, c_1, \dots$

- Hình chiếu bằng: dùng chỉ số 2.

Thí dụ: $A_2, B_2, C_2, \dots; a_2, b_2, c_2, \dots$

- Hình chiếu cạnh: dùng chỉ số 3.

Thí dụ: $A_3, B_3, C_3, \dots; a_3, b_3, c_3, \dots$

- Vết đứng: $\mathcal{P}^1$ là vết đứng của mặt phẳng $\mathcal{P}$

- Vết bằng: $\mathcal{P}^2$ là vết bằng của mặt phẳng $\mathcal{P}$

Song song: $//$. Thí dụ: $a // b$ (đường thẳng a song song với đường thẳng b).

Vuông góc: $\perp$. Thí dụ: $d \perp \mathcal{P}$ (đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $\mathcal{P}$).

Thuộc: $\in$. Thí dụ: $A \in d$ (điểm A thuộc đường thẳng d).

Giao: $\cap$. Thí dụ: $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ (mặt phẳng $\mathcal{P}$ giao với mặt phẳng $\mathcal{Q}$).

Kết quả của sự giao nhau: $=$. Thí dụ: $K = d \cap \mathcal{P}$ (điểm K là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng $\mathcal{P}$).

Trùng nhau: $\equiv$. Thí dụ: $A \equiv B$ (điểm A trùng với điểm B).

Mở đầu

PHÉP CHIẾU

§1. CÁC PHÉP CHIẾU

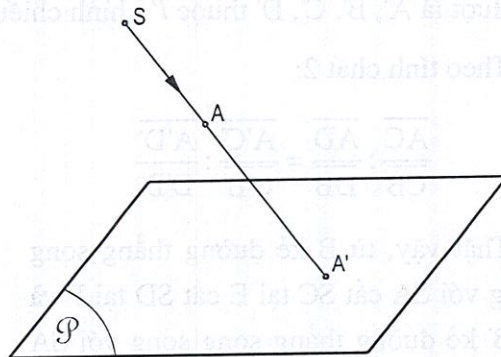
Hình học họa hình là môn học nghiên cứu các phương pháp biểu diễn không gian lên mặt phẳng - hay nói một cách khác, hình học họa hình nghiên cứu cách xây dựng các mô hình phẳng của không gian và giải các bài toán về vị trí và về lượng trên mô hình phẳng đó. Công cụ chủ yếu để xây dựng các mô hình phẳng của không gian là các phép chiếu.

1.1. Phép chiếu xuyên tâm

1.1.1. Cách xây dựng phép chiếu xuyên tâm

Trong không gian chọn một mặt phẳng $\mathcal{P}$ bất kỳ và một điểm S không thuộc mặt phẳng $\mathcal{P}$ (hình 1). Chiếu điểm A từ tâm S lên mặt phẳng $\mathcal{P}$ thực hiện như sau:

- Kẻ đường thẳng SA .
- Xác định giao điểm A' của đường thẳng SA với mặt phẳng $\mathcal{P}$.



Hình 1

Các tên gọi:

S : Tâm chiếu

$\mathcal{P}$: Mặt phẳng hình chiếu.

SA : Đường thẳng chiếu hay tia chiếu.

A' : Hình chiếu xuyên tâm của điểm

A từ S lên mặt phẳng $\mathcal{P}$.

1.1.2. Tính chất

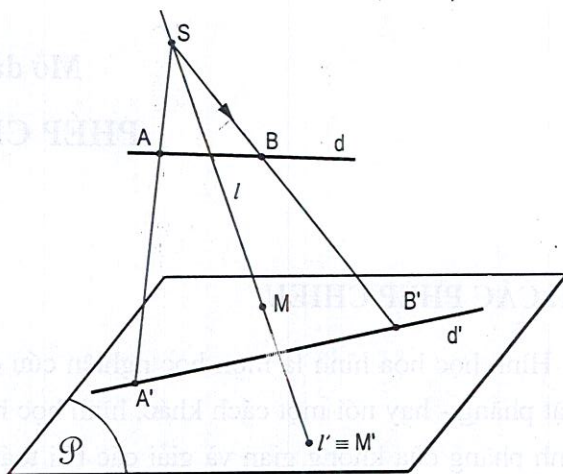
Tính chất 1: Hình chiếu xuyên tâm của một đường thẳng không đi qua tâm chiếu là một đường thẳng.

Thật vậy, một đường thẳng d bất kỳ có hình chiếu xuyên tâm là đường thẳng d' - giao tuyến của mặt phẳng (S, d) với mặt phẳng hình chiếu $\mathcal{P}$.

Ta có thể xác định d' bằng cách vẽ hình chiếu xuyên tâm A' và B' của hai điểm A và B nào đó thuộc đường thẳng d (hình 2).

- Mặt phẳng SAB chứa tâm chiếu S nên được gọi là mặt phẳng chiếu.

- Một đường thẳng l đi qua tâm chiếu S có hình chiếu là một điểm l' , mọi điểm thuộc đường thẳng l đều có hình chiếu trùng với l' . Đường thẳng l gọi là đường thẳng chiếu.



Hình 2

Tính chất 2: Tỷ số kép của 4 điểm thẳng hàng bằng tỷ số kép của 4 điểm hình chiếu tương ứng của chúng.

Giả sử 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc đường thẳng l . Hình chiếu xuyên tâm của chúng lần lượt là A', B', C', D' thuộc l' - hình chiếu xuyên tâm của đường thẳng l (hình 3).

Theo tính chất 2:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} : \frac{\overline{A'D'}}{\overline{D'B'}}$$

Thật vậy, từ B kẻ đường thẳng song song với SA cắt SC tại E cắt SD tại F và từ B' kẻ đường thẳng song song với SA cắt SC tại E' cắt SD tại F' .

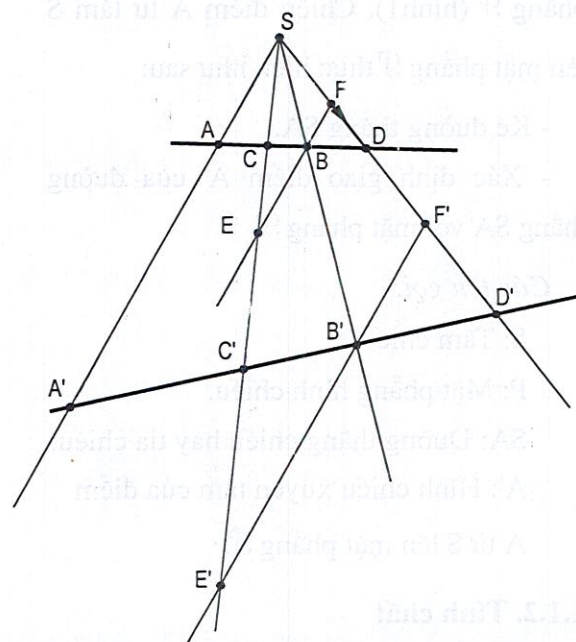
Từ hai tam giác đồng dạng ACS và

BCE ta có: $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{EB}}$

Từ hai tam giác đồng dạng ADS và

BDF ta có: $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{FB}}$

Suy ra: $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{EB}}$



Hình 3

Tương tự, từ hai tam giác đồng dạng $A'C'S$ và $B'C'E'$ ta có: $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{A'S}}{\overline{E'B'}}$

Và từ hai tam giác đồng dạng $A'D'S$ và $B'D'F'$, ta có: $\frac{\overline{A'D'}}{\overline{D'B'}} = \frac{\overline{A'S}}{\overline{F'B'}}$

Suy ra: $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} : \frac{\overline{A'D'}}{\overline{D'B'}} = \frac{\overline{F'B'}}{\overline{E'B'}}$ (2)

Vì $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{F'B'}}{\overline{E'B'}}$ nên từ (1) và (2)

Ta có: $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} : \frac{\overline{A'D'}}{\overline{D'B'}}$

1.2. Phép chiếu song song

1.2.1. Cách xây dựng phép chiếu song song

Trong không gian chọn một mặt phẳng $\mathcal{P}$ bất kỳ và một đường thẳng s không song với mặt phẳng $\mathcal{P}$ (hình 4).

Ta nói chiếu điểm A theo phương s lên mặt phẳng $\mathcal{P}$ là làm như sau:

- Qua A vẽ đường thẳng s_A song song với đường thẳng s .

- Xác định giao điểm A' của đường thẳng s_A với mặt phẳng $\mathcal{P}$.

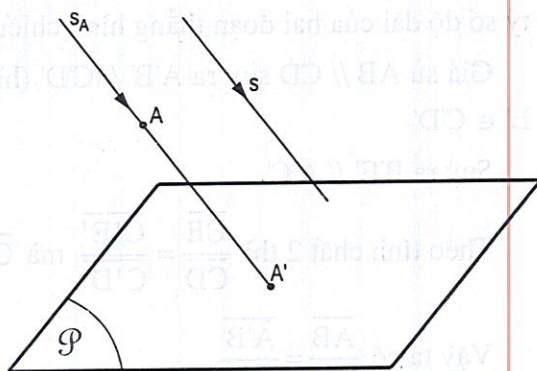
Các tên gọi:

s : Phương chiếu

$\mathcal{P}$: Mặt phẳng hình chiếu

s_A : Đường thẳng chiếu hay tia chiếu.

A' : Hình chiếu song song của điểm A theo phương s lên mặt phẳng $\mathcal{P}$.



Hình 4

1.2.2. Tính chất

Phép chiếu song song có đầy đủ các tính chất của phép chiếu xuyên tâm. Ngoài ra phép chiếu song song còn có các tính chất sau đây:

Tính chất 1: Trong phép chiếu song song hai đường thẳng song song được chiếu thành hai đường thẳng song song.

Giả sử có hai đường thẳng song song nhau AB và CD (hình 5), hình chiếu song song của chúng lần lượt là $A'B'$ và $C'D'$.

Vì các mặt phẳng $(AA'BB')$ và $(CC'DD')$ song song với nhau nên mặt phẳng $\mathcal{P}$ cắt chúng theo hai đường thẳng song song nhau: $A'B' \parallel C'D'$

Tính chất 2: Trong phép chiếu song song tỷ số đơn của 3 điểm thẳng hàng bằng tỷ số đơn của 3 điểm hình chiếu tương ứng của chúng.

Trên hình 6 ta có ba điểm C, D, E thẳng hàng và ba điểm hình chiếu tương ứng của chúng là C', D', E' cũng thẳng hàng. Vì các tia chiếu đi qua C, D, E song song nhau nên theo định lý Ta-let ta có:

$$\frac{CE}{ED} = \frac{C'E'}{E'D'}$$

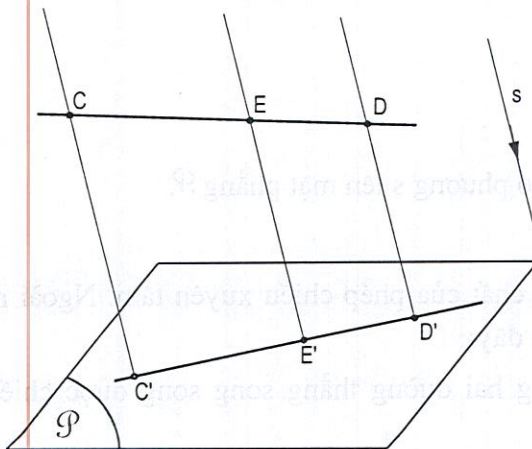
Hệ quả: Trong phép chiếu song song tỷ số độ dài của hai đoạn thẳng song song bằng tỷ số độ dài của hai đoạn thẳng hình chiếu tương ứng của chúng.

Giả sử $AB \parallel CD$ suy ra $A'B' \parallel C'D'$ (hình 7) vẽ $BE \parallel AC$ cắt CD ở E có hình chiếu là $E' \in C'D'$

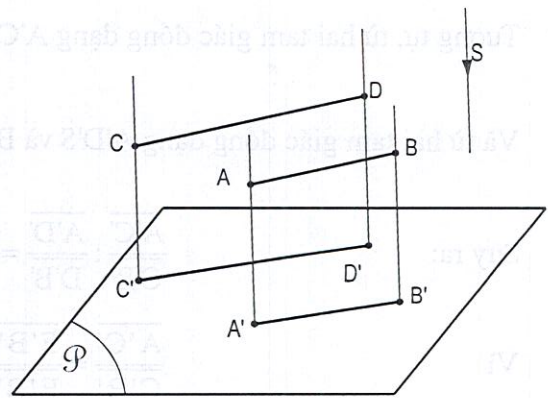
Suy ra $B'E' \parallel A'C'$

Theo tính chất 2 thì $\frac{CE}{CD} = \frac{C'E'}{C'D'}$ mà $CE = AB$ và $C'E' = A'B'$

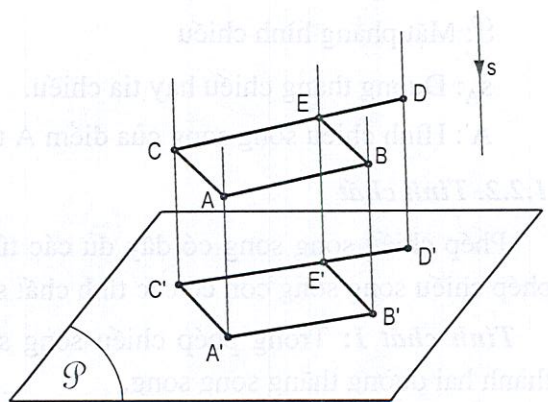
Vậy ta có $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$



Hình 6



Hình 5



Hình 7

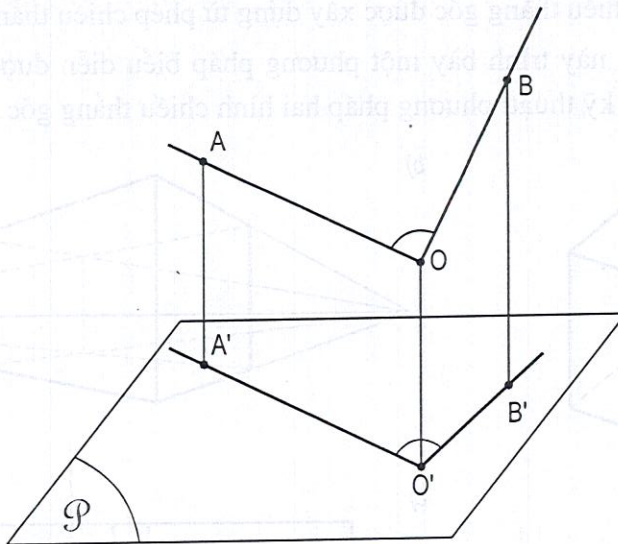
1.3. Phép chiếu thẳng góc

Phép chiếu thẳng góc là trường hợp riêng của phép chiếu song song khi phương chiếu vuông góc với mặt phẳng hình chiếu.

Như vậy, phép chiếu thẳng góc có đầy đủ các tính chất đã nêu ở phép chiếu xuyên tâm và phép chiếu song song nói trên.

Ngoài ra, phép chiếu thẳng góc còn có một tính chất riêng được phát biểu như sau:

Mệnh đề : Điều kiện cần và đủ để hình chiếu thẳng góc của một góc vuông cũng là một góc vuông là góc vuông đó có một cạnh song song với mặt phẳng hình chiếu.



Hình 8

Trên hình 8, giả sử có góc $\widehat{AOB} = 90^\circ$ và cạnh $OA \parallel \mathcal{P}$. Góc $\widehat{A'O'B'}$ là hình chiếu thẳng góc của $\widehat{AOB}$.

Dễ dàng thấy rằng OA vuông góc với mặt phẳng $OO'B'B'$ và $O'A' \parallel OA$

Suy ra $O'A' \perp O'B'$ hay góc $\widehat{A'O'B'} = 90^\circ$

Ngược lại, nếu góc $\widehat{A'O'B'} = 90^\circ$ là hình chiếu thẳng góc của góc $\widehat{AOB}$ có một cạnh song song với mặt phẳng hình chiếu thì ta cũng kết luận góc $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

§2. ỨNG DỤNG CỦA CÁC PHÉP CHIẾU

Trong kỹ thuật các phép chiếu được dùng rộng rãi để thiết lập các bản vẽ kỹ thuật thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau như cơ khí, xây dựng, kiến trúc, v.v...

Một yêu cầu cơ bản của các bản vẽ kỹ thuật là tính tương đương hình học, nghĩa là từ những hình biểu diễn trên bản vẽ người ta có thể dựng lại các đối tượng được biểu diễn. Nói một cách cụ thể hơn là ứng với một điểm trên bản vẽ là một điểm xác định duy nhất trong không gian và ngược lại.

Vì vậy trong mỗi phương pháp biểu diễn cùng với việc ứng dụng các phép chiếu người ta phải kết hợp những cách khác nhau để đảm bảo cho các hình biểu diễn thoả mãn tính tương đương hình học.

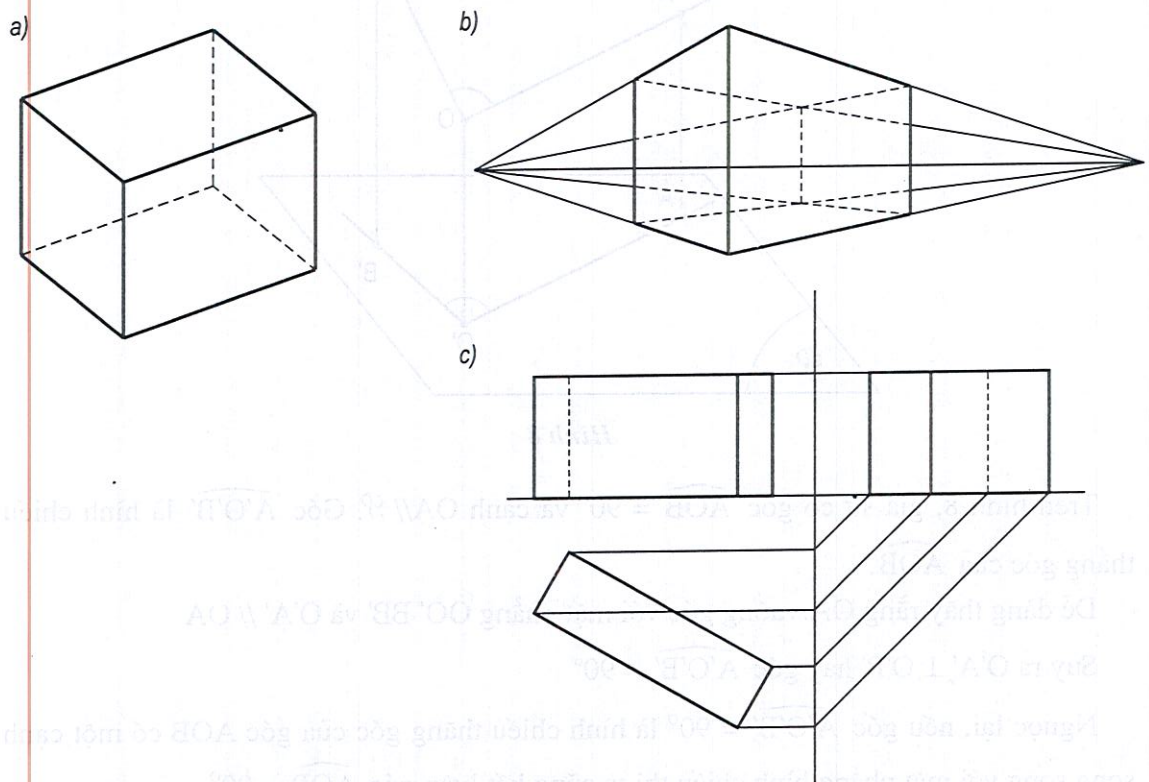
Mỗi phương pháp biểu diễn là một nội dung của hình học họa hình. Trên hình 9 là một số thí dụ minh họa về các loại hình biểu diễn của một hình hộp chữ nhật được xây dựng từ các phép chiếu khác nhau.

Hình 9a : Hình chiếu phối cảnh được xây dựng từ phép chiếu xuyên tâm.

Hình 9b : Hình chiếu trực đo được xây dựng từ phép chiếu song song.

Hình 9c : Hình chiếu thẳng góc được xây dựng từ phép chiếu thẳng góc.

Trong cuốn sách này trình bày một phương pháp biểu diễn được ứng dụng rộng rãi nhất cho các bản vẽ kỹ thuật: phương pháp hai hình chiếu thẳng góc.



Hình 9

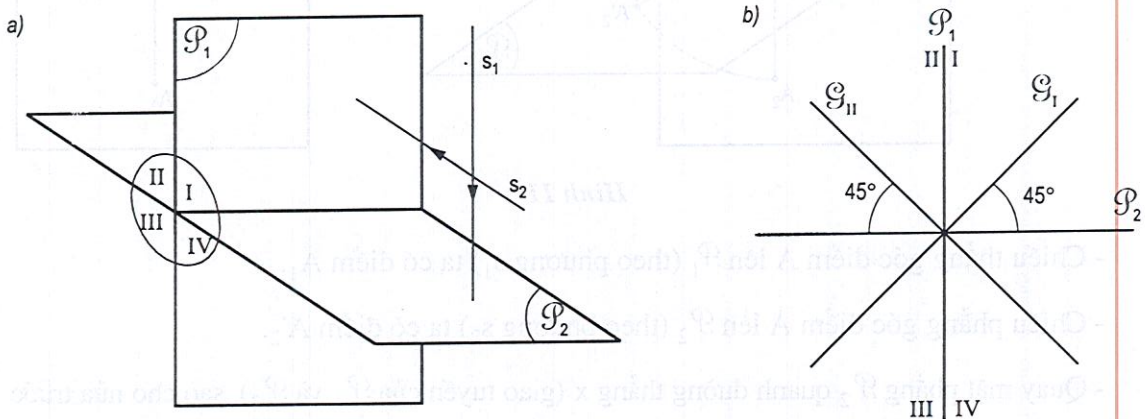
PHƯƠNG PHÁP HAI HÌNH CHIẾU THẲNG GÓC

Chương 1

BIỂU DIỄN CÁC YẾU TỐ HÌNH HỌC CƠ BẢN

Khi dùng phép chiếu thẳng góc để xây dựng hình biểu diễn các yếu tố hình học trong không gian lên mặt phẳng, muốn cho các hình biểu diễn đó thoả mãn tính tương đương hình học người ta dùng phương pháp hai hình chiếu thẳng góc mà hệ thống chiếu được xác định như sau:

Trong không gian lấy hai mặt phẳng vuông góc nhau làm hai mặt phẳng hình chiếu (hình 10).



Hình 10

- Mặt phẳng P_1 thẳng đứng chia không gian thành hai nửa: nửa trước, nửa sau. Gọi là mặt phẳng hình chiếu đứng.

- Mặt phẳng P_2 nằm ngang chia không gian thành hai nửa: nửa trên, nửa dưới - gọi là mặt phẳng hình chiếu bằng.

$x = P_1 \cap P_2$ - gọi là trục hình chiếu.

- Hai phương chiếu chính s_1 và s_2 lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng hình chiếu P_1 và P_2 .

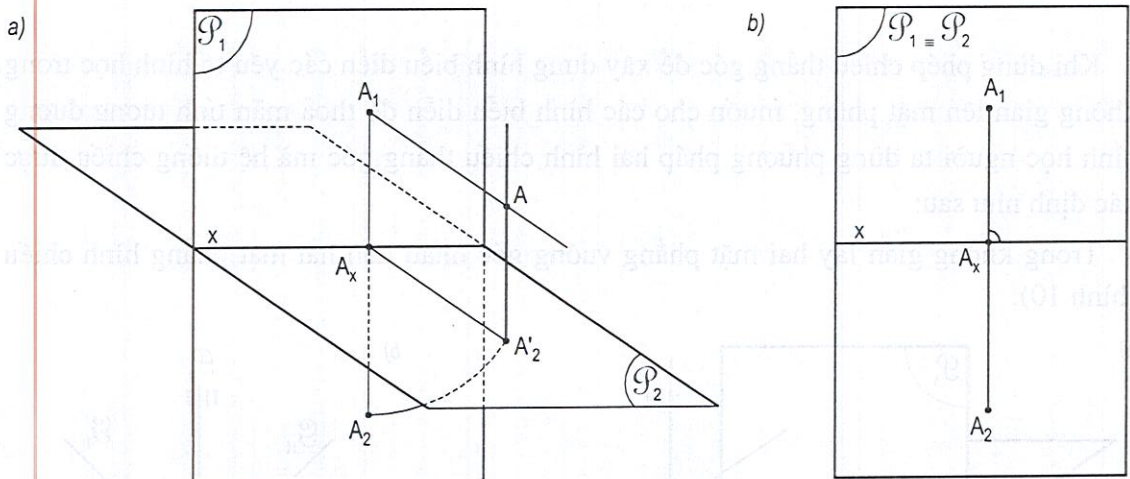
- Hai mặt phẳng hình chiếu chia không gian thành 4 phần gọi là các góc tư I, II, III, IV (như hình 10) và quy ước rằng các điểm thuộc góc tư I ở phía trước P_1 và phía trên P_2 .

• Gọi mặt phẳng phân giác của nhị diện vuông ($\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$) qua góc tư I và III là $\mathcal{G}_I$ và mặt phẳng phân giác qua góc tư II và IV là $\mathcal{G}_{II}$.

§1. BIỂU DIỄN ĐIỂM

1.1. Cách xây dựng hình biểu diễn của điểm

Giả sử trong không gian đã chọn một hệ thống chiếu như trình bày trên. Để xây dựng hình biểu diễn của điểm A bất kỳ (giả sử ở góc tư I) ta làm như sau (hình 11a).



Hình 11

- Chiếu thẳng góc điểm A lên $\mathcal{P}_1$ (theo phương s_1) ta có điểm A_1 .
- Chiếu phẳng góc điểm A lên $\mathcal{P}_2$ (theo phương s_2) ta có điểm A'_2 .
- Quay mặt phẳng $\mathcal{P}_2$ quanh đường thẳng x (giao tuyến của $\mathcal{P}_1$ và $\mathcal{P}_2$), sao cho nửa trước của $\mathcal{P}_2$ đến trùng với nửa dưới của $\mathcal{P}_1$ khi đó điểm A'_2 sẽ có vị trí là A_2 (khi $\mathcal{P}_2 \equiv \mathcal{P}_1$).

- Đặt mặt phẳng $\mathcal{P}_1 \equiv \mathcal{P}_2$ trùng với mặt phẳng bản vẽ được như hình 11b

Dễ dàng nhận thấy rằng đường thẳng nối A_1 và A_2 vuông góc với trục x. Ta có các tên gọi sau:

A_1 - hình chiếu đứng của điểm A.

A_2 - hình chiếu bằng của điểm A.

Đường thẳng nối A_1 và A_2 gọi là đường dóng.

x- gọi là trục hình chiếu.

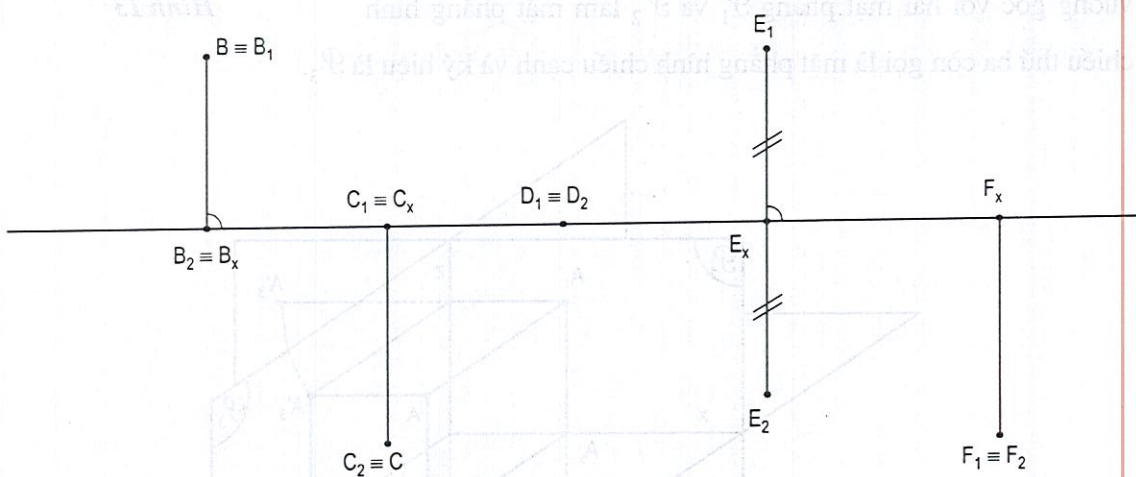
Cặp điểm (A_1, A_2) gọi là hình biểu diễn (hay đồ thức) của điểm A theo phương pháp hai hình chiếu thẳng góc.

Kết luận: Một điểm A bất kỳ trong không gian được biểu diễn bởi một cặp điểm (A_1, A_2) nằm trên đường thẳng vuông góc với trục hình chiếu. Ngược lại, một cặp điểm (A_1, A_2) thuộc đường thẳng vuông góc với trục hình chiếu biểu diễn điểm A xác định duy nhất trong không gian.

Như vậy, các điểm trong không gian và hình biểu diễn tương ứng của chúng thoả mãn tính tương đương hình học.

1.2. Hình biểu diễn của một số điểm có vị trí đặc biệt

Trên hình 12 là đồ thức của một số điểm có vị trí đặc biệt so với các mặt phẳng hình chiếu.



Hình 12

- Điểm $B \in \mathcal{P}_1$ có $B_1 \equiv B$ và $B_2 \in x$
- Điểm $C \in \mathcal{P}_2$ có $C_2 \equiv C$ và $C_1 \in x$
- Điểm $D \in x$ có $D_1 \equiv D_2 \in x$
- Điểm $E \in \mathcal{G}I$ có E_1 và E_2 đối xứng nhau qua trục x.
- Điểm $F \in \mathcal{G}II$ có $F_1 \equiv F_2$

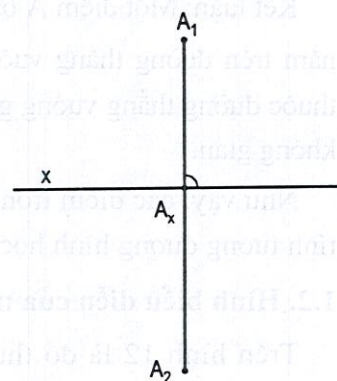
1.3. Độ cao và độ xa của điểm

Trên hình 13 biểu diễn điểm A ở góc tư thứ I.

$A_1 A_x$: gọi là độ cao của điểm A, là khoảng cách từ A tới mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}_2$. Độ cao này được coi là dương khi A ở phía trên $\mathcal{P}_2$ (A_1 ở trên trục x), được coi là âm khi A ở dưới $\mathcal{P}_2$ (A_1 dưới trục x), và độ cao là bằng 0 khi $A \in \mathcal{P}_2$ (A_1 thuộc trục x).

$\overline{A_2 A_x}$: Gọi là độ xa của A, là khoảng cách từ A tới mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathcal{P}_1$.

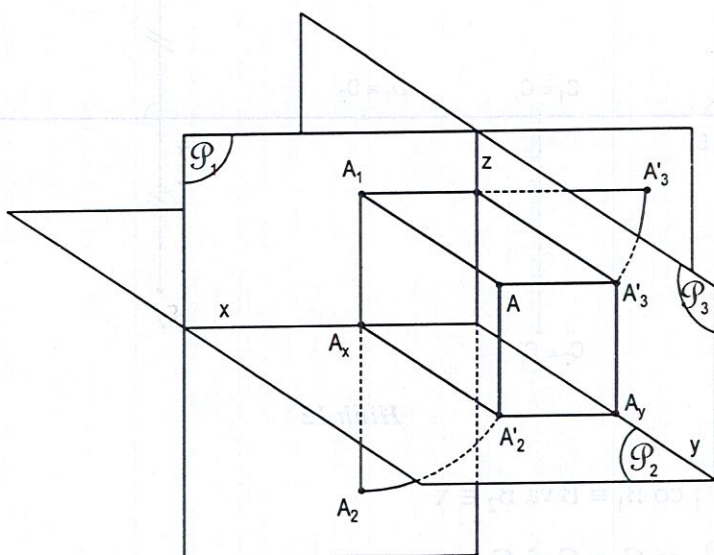
Độ xa này được coi là dương khi A ở phía trước $\mathcal{P}_1$ (A_2 dưới trục x) được coi là âm khi A ở phía sau $\mathcal{P}_1$ (A_2 ở trên trục x) và độ xa bằng 0 khi $A \in \mathcal{P}_1$ (A_2 thuộc trục x).



Hình 13

1.4. Hình chiếu thứ ba của điểm

Trong kỹ thuật ngoài hai mặt phẳng hình chiếu $\mathcal{P}_1$ và $\mathcal{P}_2$, nhiều khi người ta còn dùng mặt phẳng thứ ba đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $\mathcal{P}_1$ và $\mathcal{P}_2$ làm mặt phẳng hình chiếu thứ ba còn gọi là mặt phẳng hình chiếu cạnh và ký hiệu là $\mathcal{P}_3$.



Hình 14a

Gọi $z = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3$ và $y = \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.

Giả sử có điểm A trong hệ thống 3 mặt phẳng hình chiếu như hình 14a.

- Chiếu thẳng góc điểm A lên $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ ta lần lượt có các điểm A_1, A_2, A_3 .

Quay $\mathcal{P}_2$ quanh trục x trùng với $\mathcal{P}_1$ - sao cho nửa trước $\mathcal{P}_2$ trùng với nửa dưới $\mathcal{P}_1$ (như đã biết) thì A'_2 đến vị trí A_2 trên $\mathcal{P}_1$.

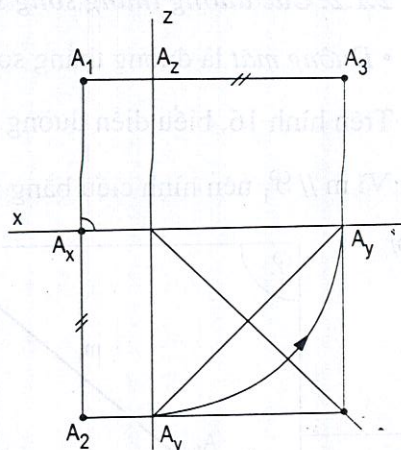
Quay $\mathcal{P}_3$ quanh trục z đến trùng với $\mathcal{P}_1$ - sao cho nửa trước $\mathcal{P}_3$ trùng với nửa bên phải $\mathcal{P}_1$ - điểm A'_3 đến vị trí A_3 thuộc $\mathcal{P}_1$.

Khi $\mathcal{P}_1 \equiv \mathcal{P}_2 \equiv \mathcal{P}_3$ và đặt trùng với mặt phẳng bản vẽ ta có hình 14b, ở đó: $A_1A_3 \parallel x$ và $\overline{A_3A_2} = \overline{A_2A_x}$.

A_3 : Gọi là hình chiếu thứ 3 của A hay hình chiếu cạnh của A.

Như vậy, khi biết hai trong ba hình chiếu thẳng góc của một điểm ta xác định được hình chiếu còn lại của điểm đó.

Trên hình 14b cũng chỉ ra các cách xác định A_3 khi biết (A_1, A_2) .



Hình 14b

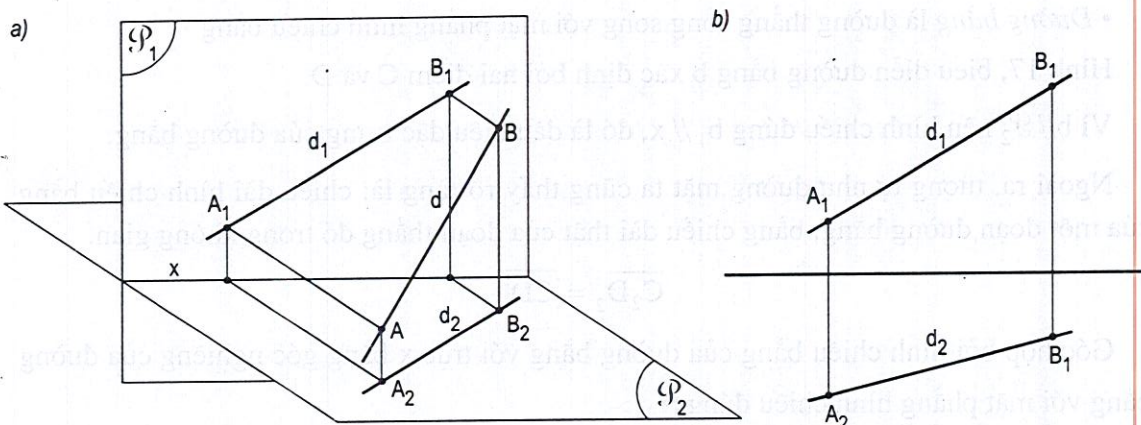
§2. BIỂU DIỄN ĐƯỜNG THẲNG

2.1. Hình biểu diễn của đường thẳng

2.1.1. Đường thẳng bất kỳ

Như đã biết qua hai điểm phân biệt xác định một đường thẳng duy nhất. Trên hình 15, hình chiếu thẳng góc của hai điểm A và B thuộc đường thẳng d là các cặp điểm (A_1, A_2) và (B_1, B_2) . Nối các hình chiếu cùng tên của A và B ta được d_1 và d_2 lần lượt là hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của đường thẳng d (hình 15b). Rõ ràng d_1 và d_2 lần lượt là hình chiếu thẳng góc của đường thẳng d lên $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$.

Vậy hình biểu diễn của một đường thẳng bất kỳ trong không gian là một cặp đường thẳng trên hình biểu diễn. Những đường thẳng bất kỳ không vuông góc với x gọi là đường thẳng thường.



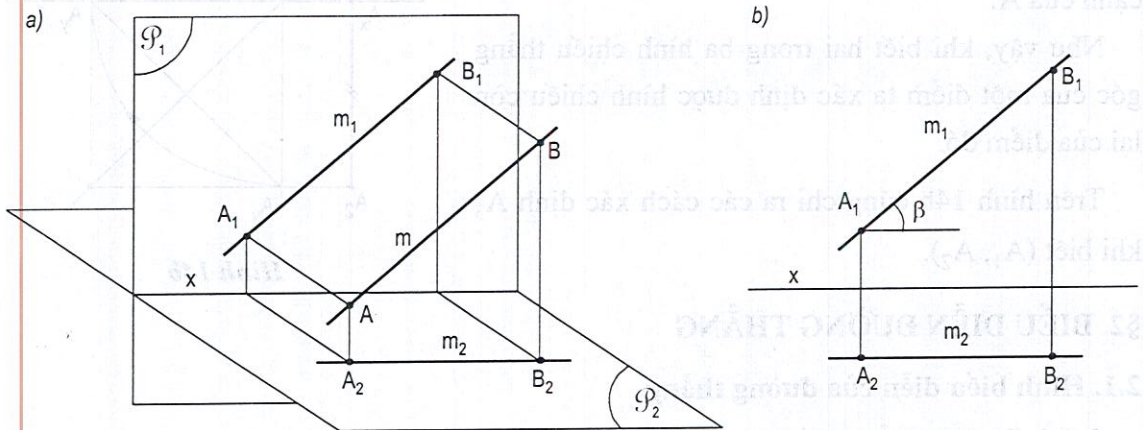
Hình 15

2.1.2. Các đường thẳng song song với mặt phẳng hình chiếu

- Đường mặt là đường thẳng song song với mặt phẳng hình chiếu đứng.

Trên hình 16, biểu diễn đường mặt m xác định bởi hai điểm A và B .

Vì $m \parallel \mathcal{P}_1$ nên hình chiếu bằng $m_2 \parallel x$, đó là dấu hiệu đặc trưng của đường mặt.



Hình 16

Ta cũng dễ dàng nhận thấy:

Chiều dài hình chiếu đứng của một đoạn đường mặt bằng chiều dài thật của đoạn thẳng đó trong không gian.

$$\overline{A_1B_1} = |\overline{AB}|$$

Góc hợp bởi hình chiếu đứng của đường mặt với trục x bằng góc nghiêng của đường mặt với mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}_2$.

$$\beta = (m_1, x) = (m, \mathcal{P}_2)$$

- Đường bằng là đường thẳng song song với mặt phẳng hình chiếu bằng

Hình 17, biểu diễn đường bằng b xác định bởi hai điểm C và D .

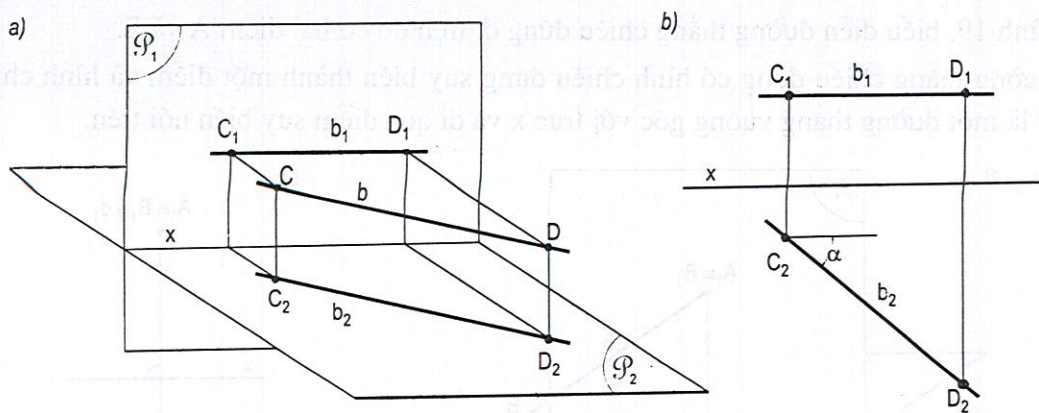
Vì $b \parallel \mathcal{P}_2$ nên hình chiếu đứng $b_1 \parallel x$, đó là dấu hiệu đặc trưng của đường bằng.

Ngoài ra, tương tự như đường mặt ta cũng thấy rõ ràng là: chiều dài hình chiếu bằng của một đoạn đường bằng, bằng chiều dài thật của đoạn thẳng đó trong không gian.

$$\overline{C_2D_2} = |\overline{CD}|$$

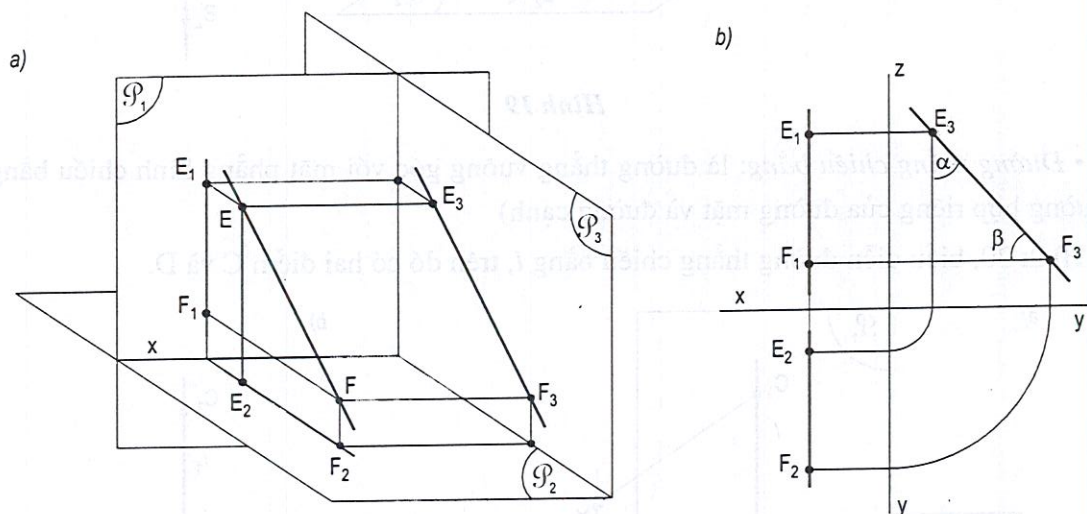
Góc hợp bởi hình chiếu bằng của đường bằng với trục x bằng góc nghiêng của đường bằng với mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathcal{P}_1$.

$$\alpha = (b_2, x) = (b, \mathcal{P}_1)$$



Hình 17

• Đường cạnh là đường thẳng song song với mặt phẳng hình chiếu cạnh, (nghĩa là nó vuông góc với trục x). Hình 18 biểu diễn đường cạnh c xác định bởi hai điểm E và F.



Hình 18

Đường cạnh c có hình chiếu đứng và hình chiếu bằng trùng nhau trên một đường dóng đứng.

Để xác định một đường cạnh duy nhất phải có hình biểu diễn của hai điểm cụ thể xác định đường cạnh đó. Như đường cạnh c trên hình 18b được xác định bởi hai điểm E và F.

Khi vẽ hình chiếu cạnh của một đoạn đường cạnh, ta cũng có chiều dài thật của đoạn đó và góc nghiêng của đường cạnh với các mặt phẳng hình chiếu.

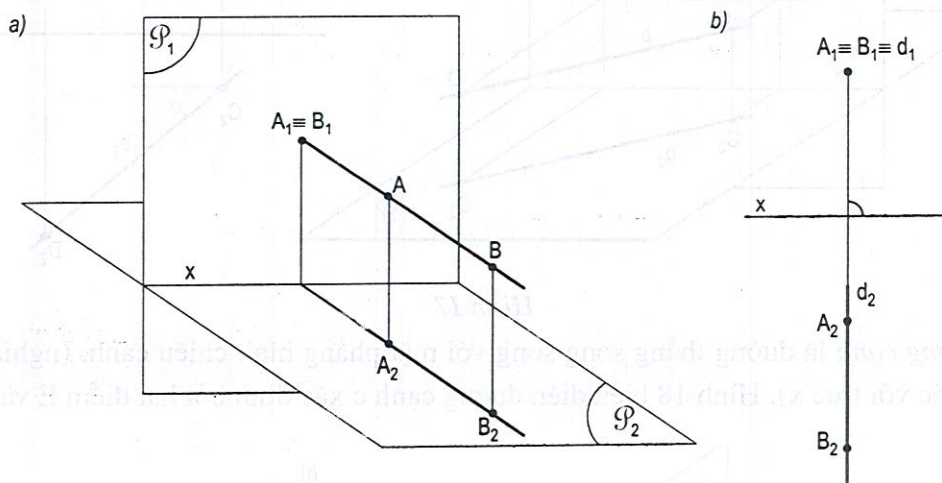
$$\overline{E_3F_3} = \overline{EF}; \quad \alpha = (EF, P_1); \quad \beta = (EF, P_2)$$

2.1.3. Các đường thẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu.

• Đường thẳng chiếu đứng: Là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu đứng (trường hợp riêng của đường bằng và đường cạnh).

Hình 19, biểu diễn đường thẳng chiếu đứng d , trên đó có hai điểm A và B.

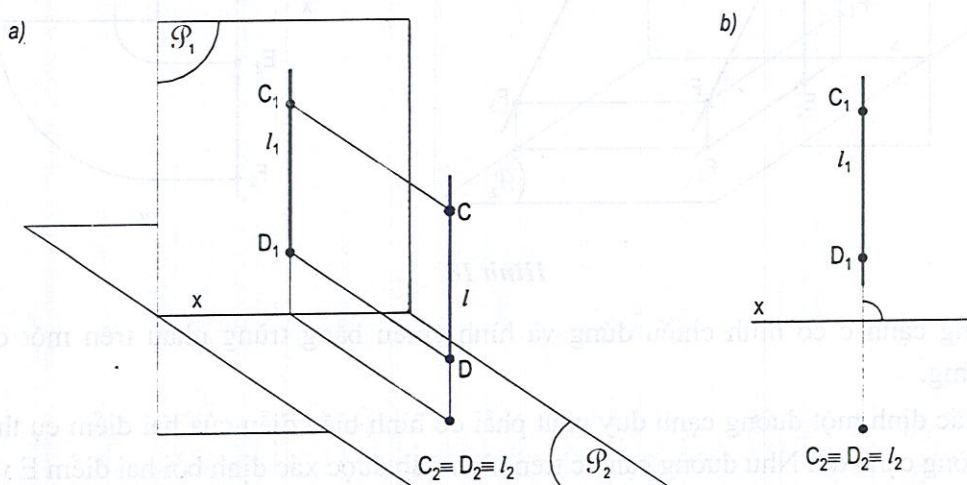
Đường thẳng chiếu đứng có hình chiếu đứng suy biến thành một điểm và hình chiếu bằng là một đường thẳng vuông góc với trục x và đi qua điểm suy biến nói trên.



Hình 19

• **Đường thẳng chiếu bằng:** là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu bằng (trường hợp riêng của đường mặt và đường cạnh)

Hình 20, biểu diễn đường thẳng chiếu bằng l , trên đó có hai điểm C và D.



Hình 20

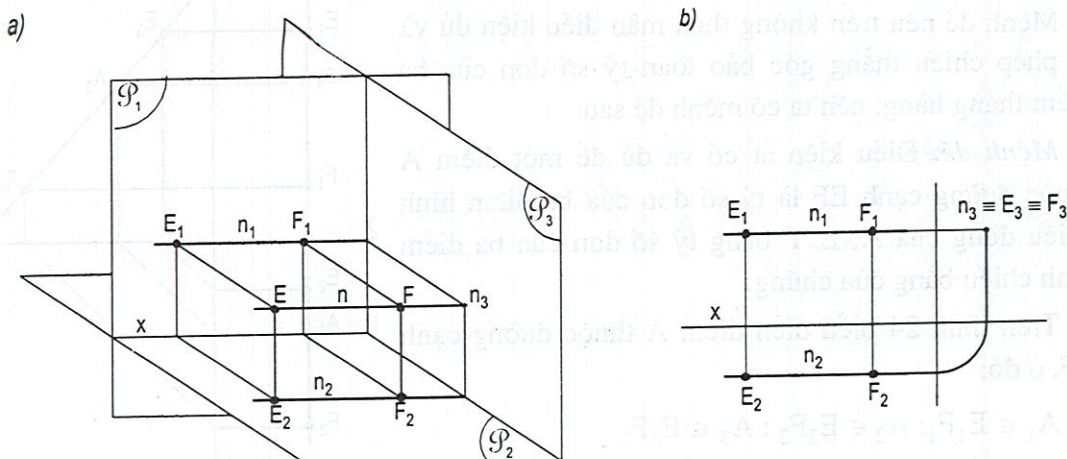
Đường thẳng chiếu bằng có hình chiếu bằng suy biến thành một điểm và hình chiếu đứng là một đường thẳng vuông góc với trục x và đi qua điểm suy biến đó.

• **Đường thẳng chiếu cạnh** là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu cạnh do đó nó song song với trục x (trường hợp riêng của đường bằng và đường mặt).

Hình 21, biểu diễn đường thẳng chiếu cạnh n , trên đó có hai điểm E và F

Đường thẳng chiếu cạnh có hình chiếu đứng và hình chiếu bằng song song nhau và song song với trục x, ($n_1 // n_2 // x$)

Đường thẳng chiếu cạnh có hình chiếu thứ ba suy biến thành 1 điểm.



Hình 21

2.2. Sự liên thuộc của điểm với đường thẳng

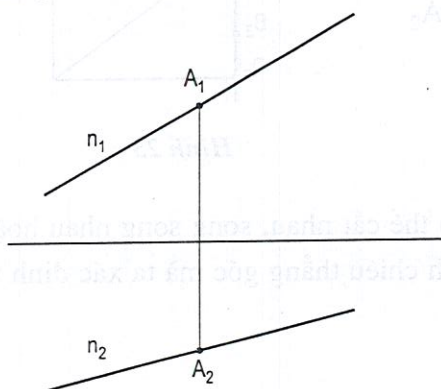
2.2.1. Đối với các đường thẳng không phải đường cạnh

Vì phép chiếu bảo tồn sự liên thuộc của điểm và đường thẳng nên ta có thể phát biểu trong phương pháp hai hình chiếu thẳng góc như sau:

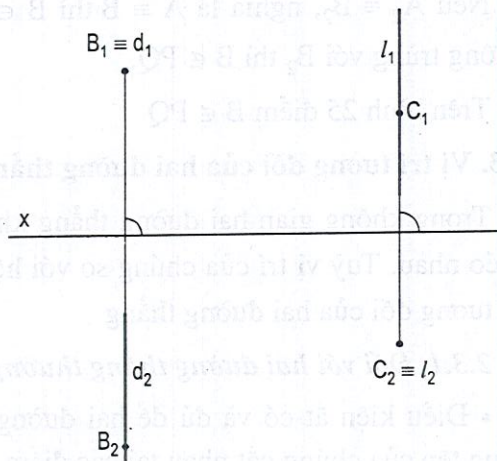
Mệnh đề: Điều kiện cần và đủ để một điểm thuộc một đường thẳng không phải đường cạnh là các hình chiếu của điểm đó thuộc các hình chiếu cùng tên của đường thẳng.

Hình 22, biểu diễn điểm A thuộc đường thẳng n.

Hình 23, biểu diễn điểm B thuộc đường thẳng chiếu đứng d và điểm C thuộc đường thẳng chiếu bằng l.



Hình 22



Hình 23

2.2.2. Đối với đường cạnh

Nhắc lại rằng để xác định một đường cạnh bao giờ cũng phải cho trước hai điểm của nó.

Mệnh đề nêu trên không thoả mãn điều kiện đủ và vì phép chiếu thẳng góc bảo toàn tỷ số đơn của ba điểm thẳng hàng, nên ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề: Điều kiện cần và đủ để một điểm A thuộc đường cạnh EF là tỷ số đơn của ba điểm hình chiếu đứng của A, E, F bằng tỷ số đơn của ba điểm hình chiếu bằng của chúng.

Trên hình 24 biểu diễn điểm A thuộc đường cạnh EF, ở đó:

$$A_1 \in E_1F_1; A_2 \in E_2F_2; A_3 \in E_3F_3$$

$$\text{Và: } (E_1F_1A_1) = (E_2F_2A_2) = (E_3F_3A_3)$$

Để làm sáng tỏ vấn đề trên, xét ví dụ sau:

Ví dụ: Cho đường cạnh PQ (P_1Q_1, P_2Q_2) và điểm B, ở đó $B_1 \in P_1Q_1$ và $B_2 \in P_2Q_2$. Hãy xét xem điểm B có thuộc đường cạnh PQ không? (hình 25).

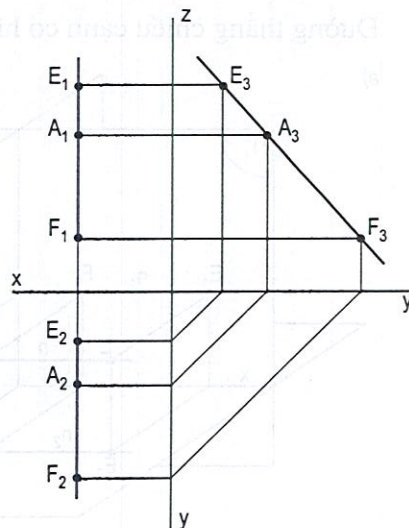
Để biết B có thuộc PQ không, ta lấy trên PQ điểm A sao cho $A_1 \equiv B_1$. Từ A_1 suy ra $A_2 \in P_2Q_2$.

$$\text{Sao cho: } \frac{P_1A_1}{A_1Q_1} = \frac{P_2A_2}{A_2Q_2}$$

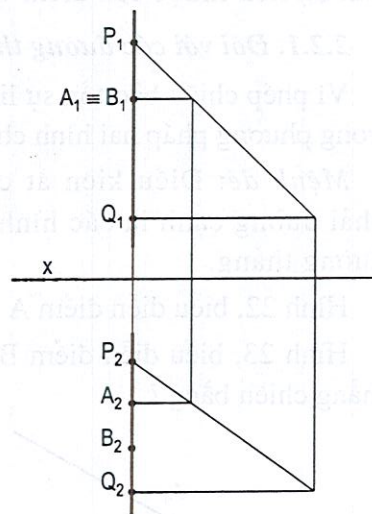
Có nhiều cách xác định được A_2 .

Nếu $A_2 \equiv B_2$, nghĩa là $A \equiv B$ thì $B \in PQ$. Nếu A_2 không trùng với B_2 thì $B \notin PQ$.

Trên hình 25 điểm $B \notin PQ$



Hình 24



Hình 25

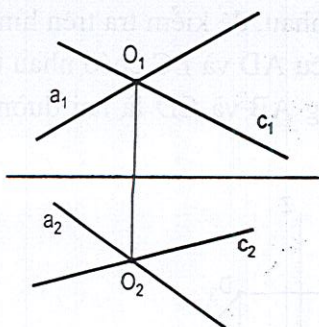
2.3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong không gian hai đường thẳng khác nhau có thể cắt nhau, song song nhau hoặc chéo nhau. Tuỳ vị trí của chúng so với hệ thống hình chiếu thẳng góc mà ta xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng.

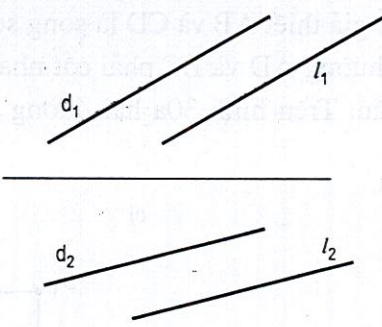
2.3.1. Đối với hai đường thẳng thường

• Điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng thường cắt nhau là các cặp hình chiếu cùng tên của chúng cắt nhau tại các điểm cùng thuộc một đường đồng.

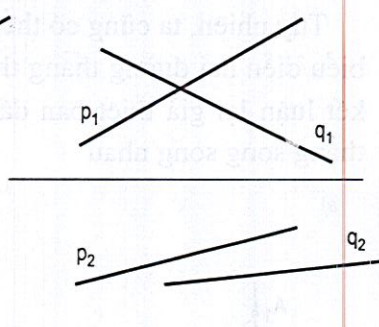
Trên hình 26 là hình biểu diễn của hai đường thẳng thường a và c cắt nhau tại điểm O.



Hình 26



Hình 27



Hình 28

• Điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng thường song song nhau là các cặp hình chiếu cùng tên của chúng song song nhau.

Hình 27 là hình biểu diễn của hai đường thẳng d và l song song nhau.

Ở đó: $d_1 // l_1$ đồng thời $d_2 // l_2$.

• Hai đường thẳng thường bất kỳ không thỏa mãn điều kiện cắt nhau hay song song nhau nói trên là hai đường thẳng chéo nhau.

Hình 28, biểu diễn hai đường thẳng p và q chéo nhau.

2.3.2. Một trong hai đường thẳng là đường cạnh

Giả sử có hình biểu diễn của đường thẳng thường d và đường cạnh PQ (hình 29).

Dễ dàng nhận thấy rằng một đường thẳng thường và một đường cạnh không bao giờ song song nhau. Nghĩa là chúng chỉ có thể cắt nhau hay chéo nhau. Để biết d và PQ cắt nhau hay chéo nhau ta làm như sau:

Gọi $I_1 = P_1Q_1 \cap d_1$ $I_2 = P_2Q_2 \cap d_2$

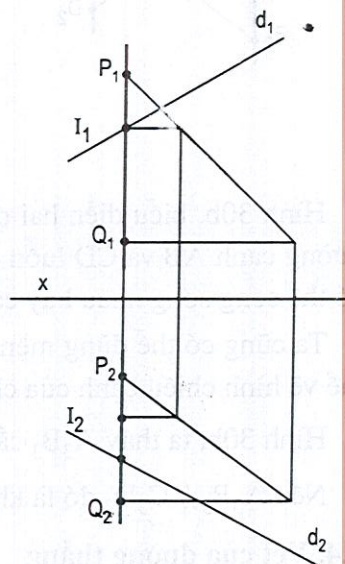
Hiển nhiên I là một điểm thuộc đường thẳng d

Xét xem I có thuộc đường cạnh PQ không ?

Nếu $I \in PQ$ ta nói d và PQ cắt nhau

Nếu $I \notin PQ$ ta nói d và PQ chéo nhau

Trên hình 29, hai đường thẳng d và PQ chéo nhau.



Hình 29

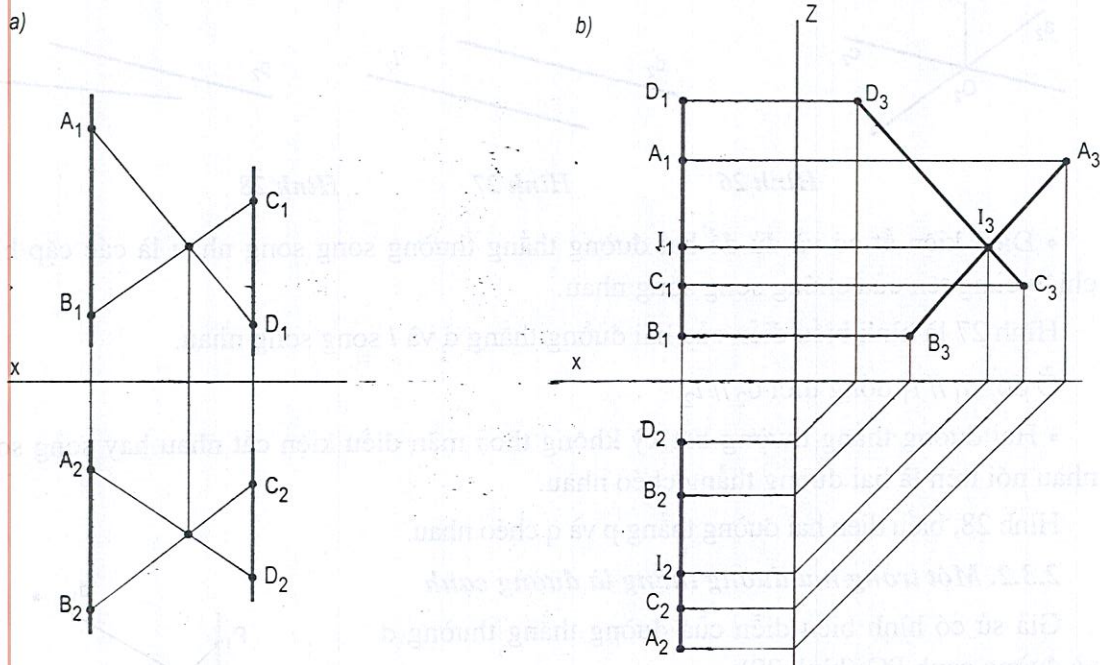
2.3.3. Đối với hai đường cạnh

Hình 30a, biểu diễn hai đường cạnh AB và CD trên hai đường dóng khác nhau, do đó hai đường cạnh này không cắt nhau mà chúng chỉ có thể song song hay chéo nhau.

Điều kiện cần và đủ để hai đường cạnh AB và CD song song nhau là:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2}$$

Tuy nhiên, ta cũng có thể giả thiết AB và CD là song song nhau, để kiểm tra trên hình biểu diễn hai đường thẳng thường AD và BC phải cắt nhau, nếu AD và BC chéo nhau ta kết luận lại giả thiết ban đầu. Trên hình 30a hai đường thẳng AB và CD là hai đường thẳng song song nhau



Hình 30

Hình 30b, biểu diễn hai đường cạnh trên một đường dóng - trong trường hợp này hai đường cạnh AB và CD luôn cùng thuộc một mặt phẳng nên không chéo nhau, chúng chỉ có thể song song nhau hay cắt nhau.

Ta cũng có thể dùng mệnh đề trên để xét vị trí tương đối của AB và CD. Ngoài ra, có thể vẽ hình chiếu cạnh của chúng để có ngay kết luận.

Hình 30b, ta thấy A_3B_3 cắt C_3D_3 tại I_3 - nghĩa là AB và CD cắt nhau tại I.

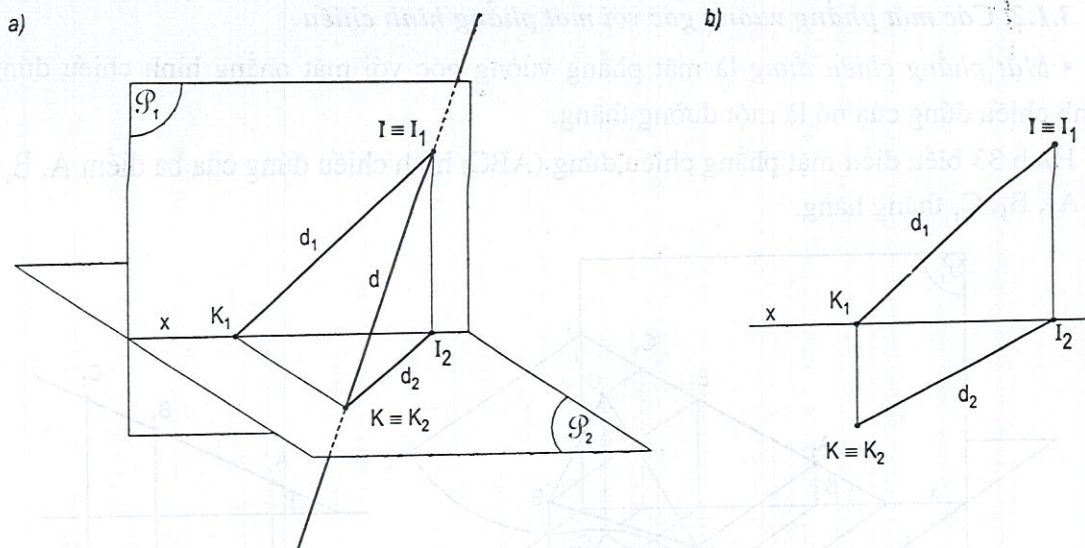
Nếu $A_3B_3 \parallel C_3D_3$ đó là khi $AB \parallel CD$.

2.4. Vết của đường thẳng

Vết của đường thẳng là các giao điểm của đường thẳng với các mặt phẳng hình chiếu.

Giả sử trong không gian có đường thẳng d bất kỳ (hình 31a) giao điểm I của đường thẳng d với mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathcal{P}_1$ được gọi là vết đứng của đường thẳng d . Giao điểm K của đường thẳng d với mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}_2$ được gọi là vết bằng của đường thẳng d .

Hình 31b, chỉ ra cách xác định vết đứng I và vết bằng K của một đường thẳng d có hình biểu diễn (d_1, d_2) .



Hình 31

§3. BIỂU DIỄN MẶT PHẪNG

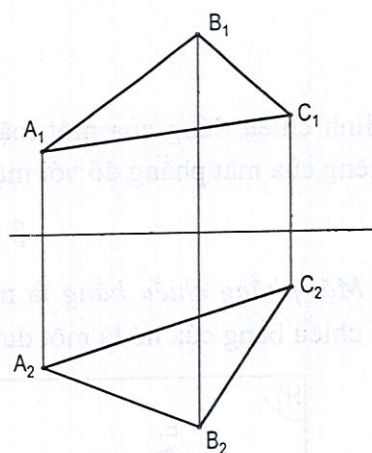
3.1. Hình biểu diễn của mặt phẳng

3.1.1. Mặt phẳng bất kỳ

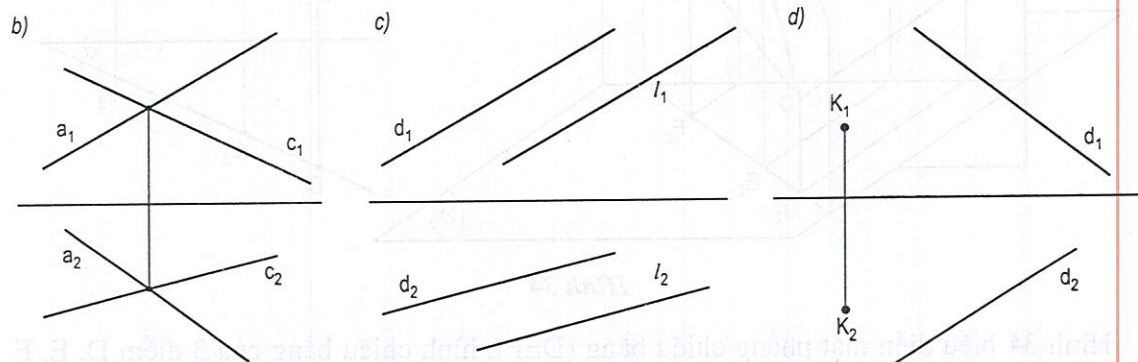
Trong phương pháp hai hình chiếu thẳng góc mỗi mặt phẳng được biểu diễn bởi các yếu tố xác định mặt phẳng đó.

Một mặt phẳng bất kỳ có thể được xác định bởi 3 điểm không thẳng hàng, hai đường thẳng cắt nhau, hai đường thẳng song song nhau hay một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó.

Trên hình 32 là hình biểu diễn của các mặt phẳng: $\mathcal{P}(A,B,C)$, $\mathcal{P}(a \cap c)$, $\mathcal{R}(m/n)$, $\mathcal{S}(K,d)$.



Hình 32a

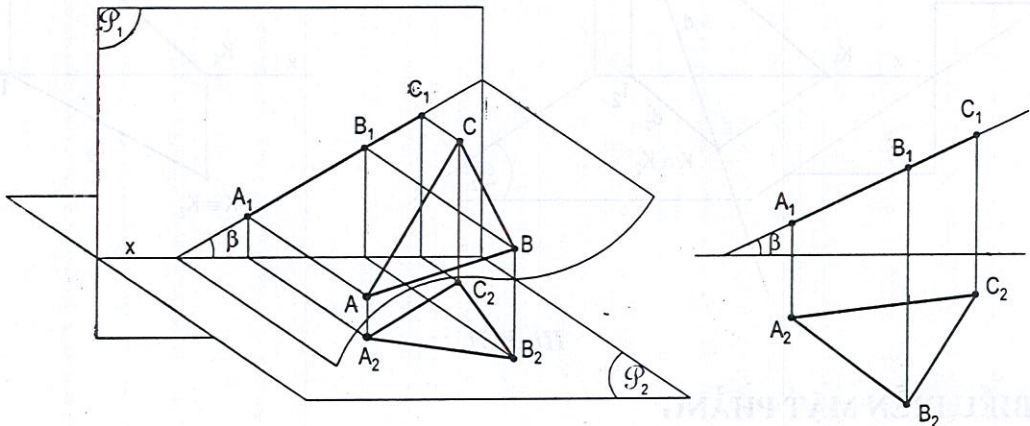


Hình 32

3.1.2. Các mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu

- **Mặt phẳng chiếu đứng** là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu đứng, hình chiếu đứng của nó là một đường thẳng.

Hình 33 biểu diễn mặt phẳng chiếu đứng (ABC) hình chiếu đứng của ba điểm A, B, C là A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

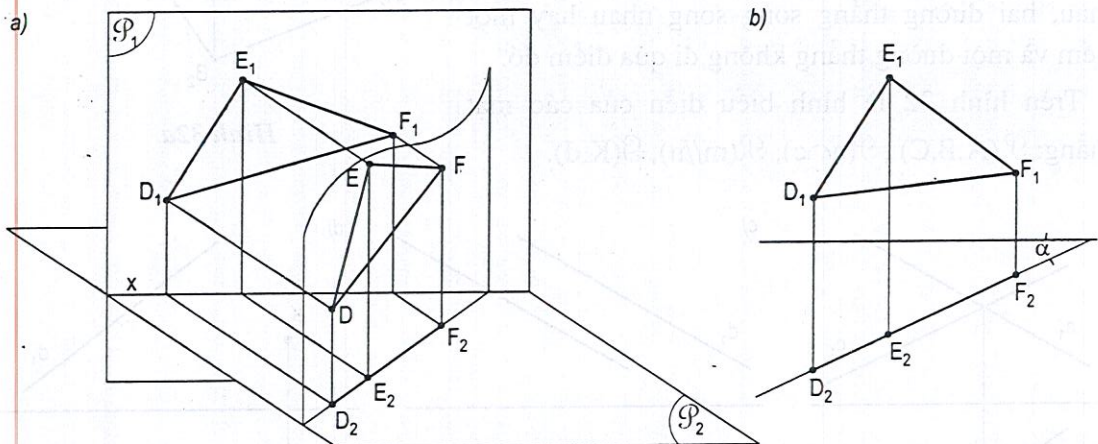


Hình 33

Hình chiếu đứng của một mặt phẳng chiếu đứng hợp với trục x một góc bằng góc nghiêng của mặt phẳng đó với mặt phẳng hình chiếu bằng:

$$\beta = (A_1B_1C_1, x) = (ABC, P_2)$$

- **Mặt phẳng chiếu bằng** là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu bằng, hình chiếu bằng của nó là một đường thẳng.



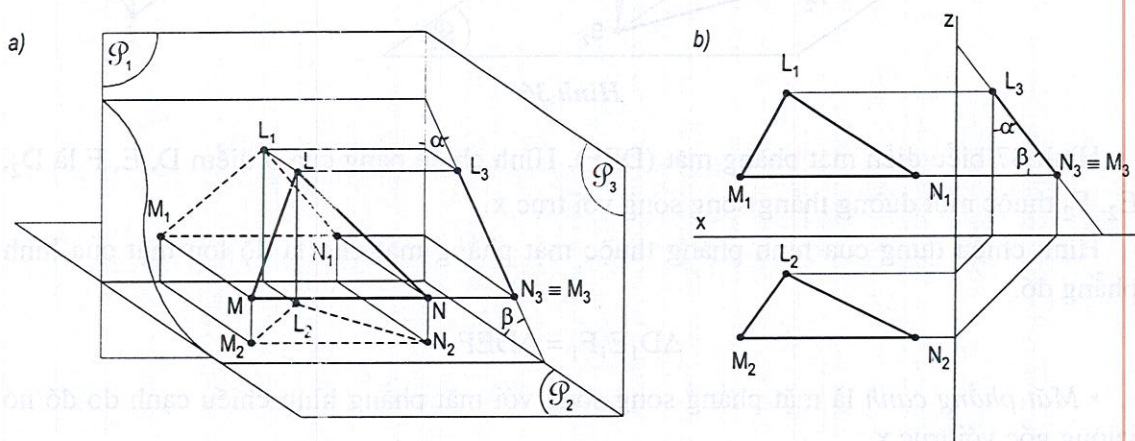
Hình 34

Hình 34 biểu diễn mặt phẳng chiếu bằng (DEF), hình chiếu bằng của 3 điểm D, E, F là D_2, E_2, F_2 thẳng hàng.

Hình chiếu bằng của mặt phẳng chiếu bằng hợp với trục x một góc bằng góc nghiêng của mặt phẳng đó với mặt phẳng hình chiếu đứng.

$$\alpha = (D_2E_2F_2, x) = (DEF, \mathcal{P}_1)$$

- *Mặt phẳng chiếu cạnh* là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu cạnh do đó nó song song với trục x , hình chiếu cạnh của mặt phẳng này là một đường thẳng. Hình 35 biểu diễn 3 hình chiếu thẳng góc của mặt phẳng chiếu cạnh (LMN) có đường thẳng $MN \parallel x$.



Hình 35

Hình chiếu cạnh của mặt phẳng chiếu cạnh hợp với trục z và trục x , hai góc phụ nhau lần lượt là góc nghiêng của mặt phẳng đó với mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathcal{P}_1$ và mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}_2$.

3.1.3. Các mặt phẳng song song với mặt phẳng hình chiếu

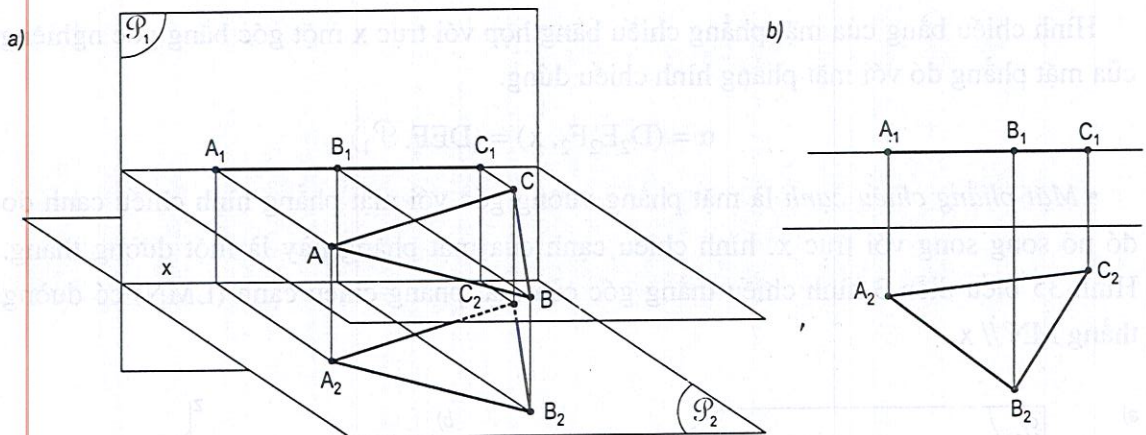
- *Mặt phẳng bằng* là mặt phẳng song song với mặt phẳng hình chiếu bằng (trường hợp riêng của mặt phẳng chiếu đứng) - Hình chiếu đứng của nó là một đường thẳng song song với trục hình chiếu.

Hình 36 biểu diễn mặt phẳng bằng (ABC), hình chiếu đứng của 3 điểm A, B, C là A_1, B_1, C_1 thuộc một đường thẳng song song với trục x .

Hình chiếu bằng của một hình phẳng thuộc một mặt phẳng bằng cho ta độ lớn thật của hình phẳng đó: $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta ABC$.

- *Mặt phẳng mặt* là mặt phẳng song song với mặt phẳng hình chiếu đứng (trường hợp riêng của mặt phẳng chiếu bằng).

Hình chiếu bằng của nó là một đường thẳng song song với trục x .



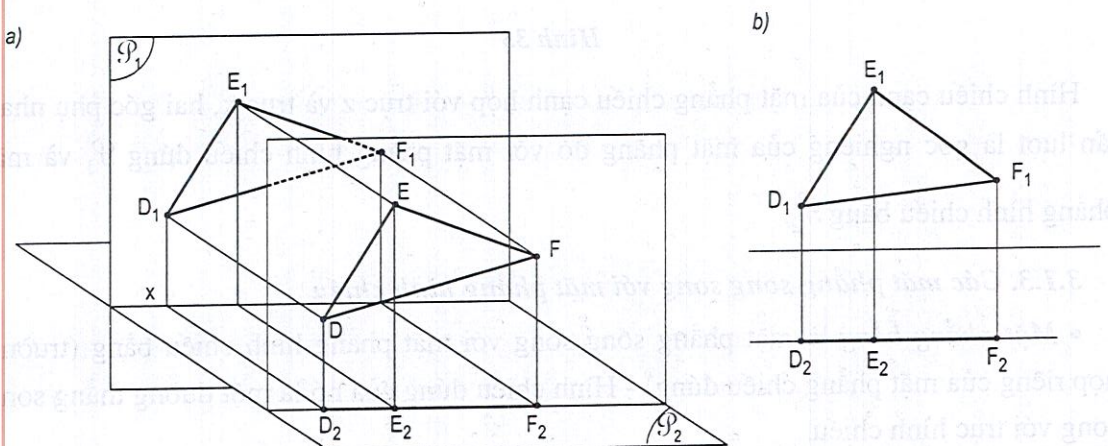
Hình 36

Hình 37 biểu diễn mặt phẳng mặt (DEF). Hình chiếu bằng của 3 điểm D, E, F là D_2, E_2, F_2 thuộc một đường thẳng song song với trục x.

Hình chiếu đứng của hình phẳng thuộc mặt phẳng mặt cho ta độ lớn thật của hình phẳng đó.

$$\Delta D_1E_1F_1 = \Delta DEF$$

• *Mặt phẳng cạnh* là mặt phẳng song song với mặt phẳng hình chiếu cạnh do đó nó vuông góc với trục x.

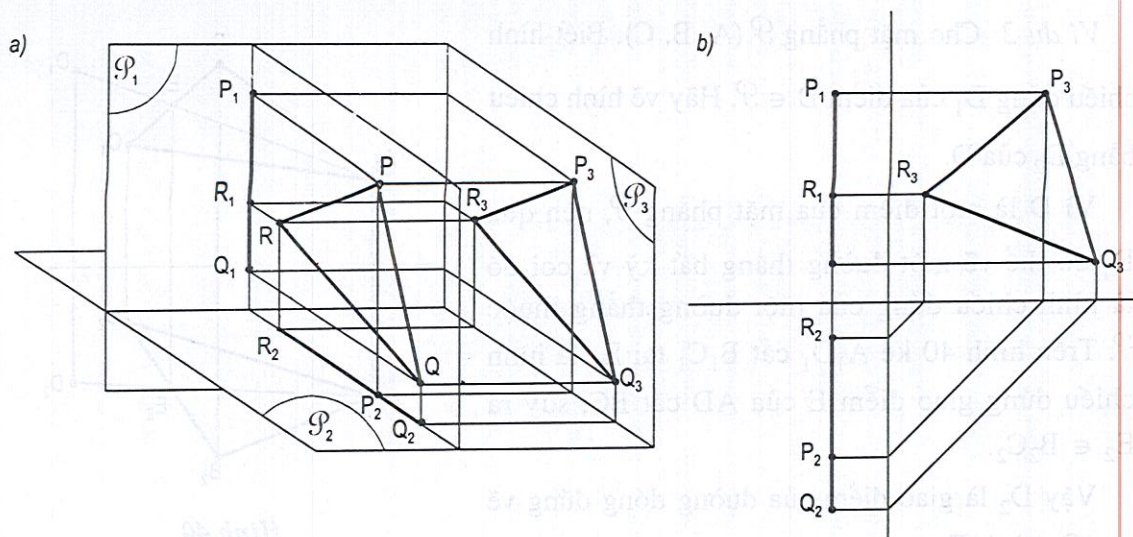


Hình 37

Mặt phẳng cạnh có hình chiếu đứng và hình chiếu bằng là hai đường thẳng trùng nhau và vuông góc với trục x. Hình 38 biểu diễn mặt phẳng cạnh (PRQ) có hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của 3 điểm P, Q, R là P_1, Q_1, R_1 và P_2, Q_2, R_2 cùng thuộc một đường thẳng vuông góc với trục x.

Hình chiếu cạnh của một hình phẳng thuộc mặt phẳng cạnh cho ta độ lớn thật của hình phẳng đó.

$$\Delta P_3Q_3R_3 = \Delta PQR$$



Hình 38

3.2. Sự liên thuộc của điểm và đường thẳng với mặt phẳng

Trên đây đã nghiên cứu sự liên thuộc của điểm với đường thẳng. Để biểu diễn sự liên thuộc của điểm và đường thẳng với mặt phẳng người ta dựa vào hai mệnh đề sau:

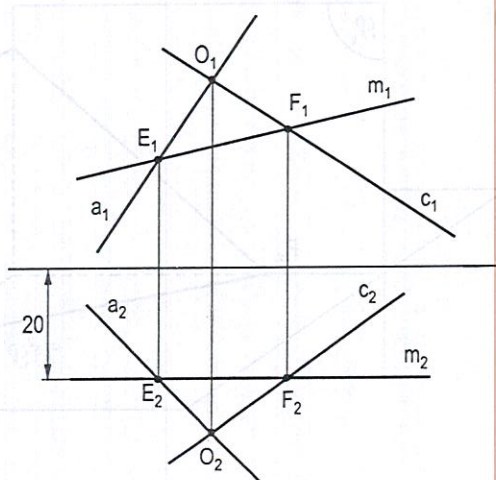
- Một đường thẳng thuộc một mặt phẳng nếu đường thẳng đó có hai điểm thuộc mặt phẳng.
- Một điểm thuộc một mặt phẳng nếu điểm đó thuộc một đường thẳng của mặt phẳng.

Ví dụ 1: Cho mặt phẳng $\mathcal{P}(a \cap c)$. Hãy vẽ trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ một đường thẳng có độ xa 20 đơn vị.

Đường thẳng m thuộc mặt phẳng $\mathcal{P}$ là đường thẳng song song với mặt phẳng hình chiếu đứng.

Do vậy, trước hết vẽ hình chiếu bằng m_2 của m song song với trục x và cách trục x một đoạn + 20 đơn vị.

Trên hình 39 vẽ m_2 cắt a_2 tại E_2 và cắt c_2 tại F_2 lần lượt dóng lên a_1 và c_1 được E_1 và F_1 ta có hai điểm E và F thuộc mặt phẳng $\mathcal{P}$. Hình chiếu đứng m_1 của m là đường thẳng E_1F_1



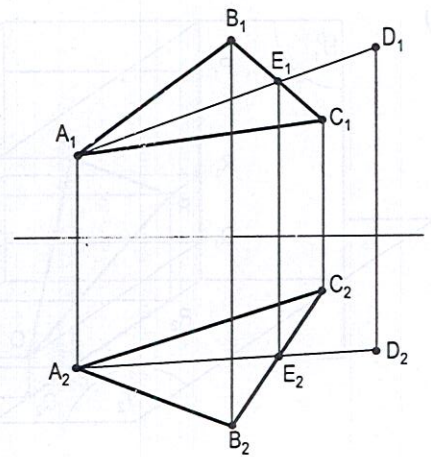
Hình 39

Từ cách vẽ một đường thẳng của ví dụ trên ta có thể vẽ trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ một đường thẳng bất kỳ nào đó (như đường bằng, đường cạnh,...).

Ví dụ 2: Cho mặt phẳng $\mathcal{P}$ (A, B, C). Biết hình chiếu đứng D_1 của điểm $D \in \mathcal{P}$. Hãy vẽ hình chiếu bằng D_2 của D.

Vì D là một điểm của mặt phẳng $\mathcal{P}$, nên qua D_1 có thể vẽ một đường thẳng bất kỳ và coi đó là hình chiếu đứng của một đường thẳng thuộc $\mathcal{P}$. Trên hình 40 kẻ A_1D_1 cắt B_1C_1 tại E_1 là hình chiếu đứng giao điểm E của AD cắt BC, suy ra $E_2 \in B_2C_2$.

Vậy D_2 là giao điểm của đường dóng đứng vẽ qua D_1 và A_2E_2 .



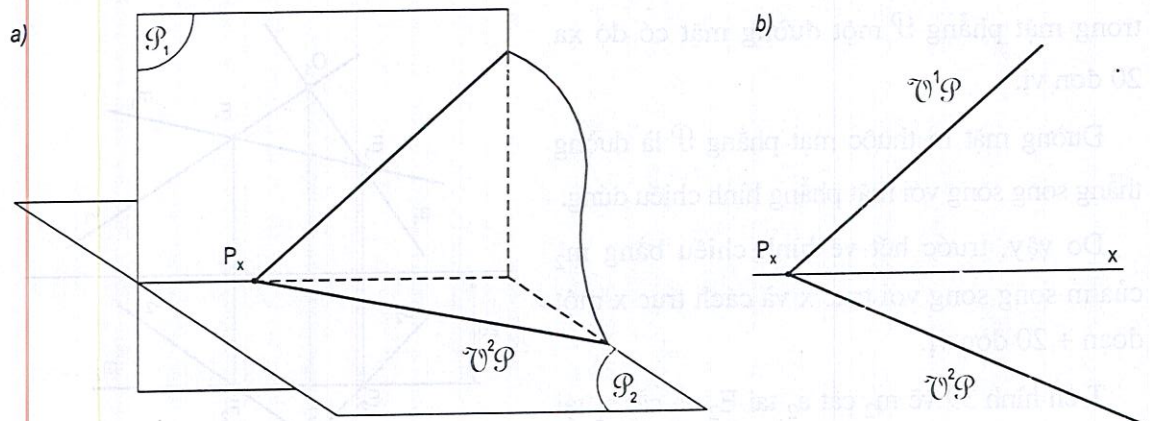
Hình 40

Qua ví dụ 2, nhận thấy nếu biết trước một hình chiếu của điểm bất kỳ nào đó thuộc mặt phẳng đã cho thì dễ dàng xác định được hình chiếu còn lại của điểm đó.

3.3. Vết của mặt phẳng

Trong hình học họa hình ngoài các cách biểu diễn mặt phẳng như đã nêu trên, người ta còn thường biểu diễn mặt phẳng bởi các vết của nó.

Các vết của một mặt phẳng là các giao tuyến của mặt phẳng đó với các mặt phẳng hình chiếu (hình 41).



Hình 41

Vết đứng của mặt phẳng $\mathcal{P}$ là giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{P}$ với mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathcal{P}_1$ và ký hiệu là $V^1\mathcal{P}$.

Vết bằng của mặt phẳng $\mathcal{P}$ là giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{P}$ với mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}_2$ và ký hiệu là $V^2\mathcal{P}$.

Biểu diễn mặt phẳng bằng hai vết là cách biểu diễn mặt phẳng bởi hai đường thẳng cắt nhau (hay song song nhau).

Vì hai vết của mặt phẳng thuộc các mặt phẳng hình chiếu nên mỗi vết có một hình chiếu trùng với chính nó và hình chiếu còn lại trùng với trục x .

Ví dụ: Cho mặt phẳng $\mathcal{P}$ ($a \cap c$), hãy vẽ các vết của mặt phẳng $\mathcal{P}$ (hình 42).

Gọi: $I = a \cap \mathcal{P}_1$

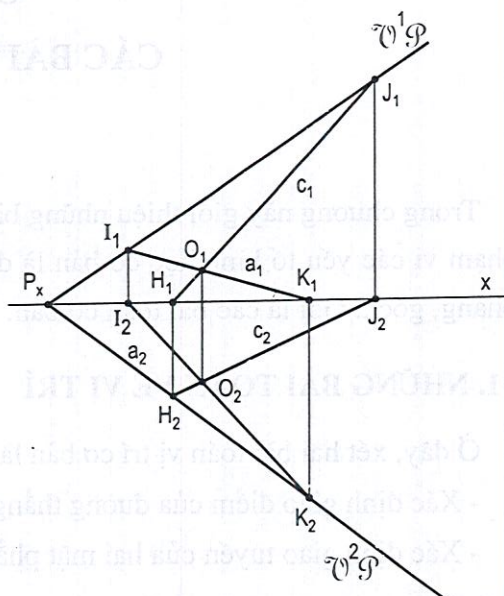
$J = c \cap \mathcal{P}_1$

Đó là các vết đứng của hai đường thẳng a và c nên $IJ = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_1$ - vết đứng của mặt phẳng $\mathcal{P}$

Gọi: $K = a \cap \mathcal{P}_2$

$H = c \cap \mathcal{P}_2$

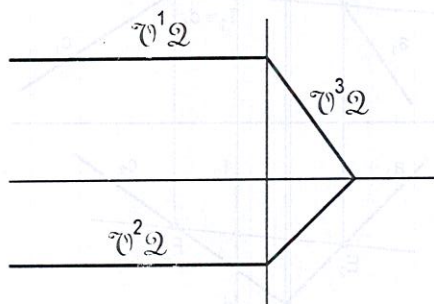
Đó là các vết bằng của hai đường thẳng a và c nên $KH = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_2$ - vết bằng của mặt phẳng $\mathcal{P}$



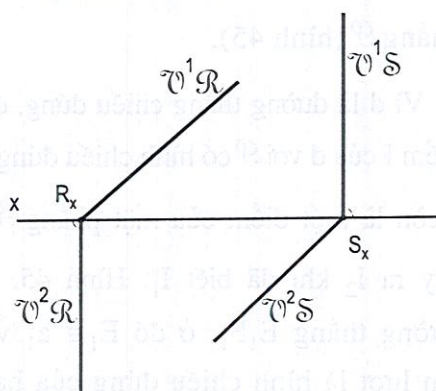
Hình 42

Chú ý: Hai vết của mặt phẳng cắt nhau tại một điểm thuộc x (hoặc song song nhau và song song với x khi mặt phẳng là mặt phẳng chiếu cạnh, hình 43).

Mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$ có vết bằng vuông góc với trục x , mặt phẳng chiếu bằng $\mathcal{S}$ có vết đứng vuông góc với trục x , hình 44.



Hình 43



Hình 44

Chương 2

CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Trong chương này giới thiệu những bài toán về vị trí và những bài toán về lượng trong phạm vi các yếu tố hình học cơ bản là điểm, đường thẳng, đoạn thẳng, mặt phẳng, hình phẳng, góc... Gọi là các bài toán cơ bản.

§1. NHỮNG BÀI TOÁN VỀ VỊ TRÍ

Ở đây, xét hai bài toán vị trí cơ bản là:

- Xác định giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng.
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.

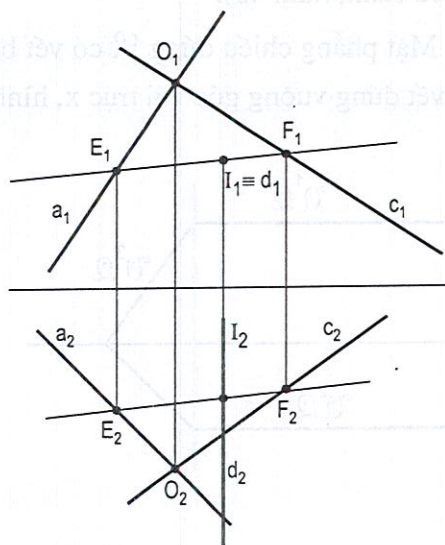
1.1. Các trường hợp đặc biệt

Đó là các bài toán cho trước hai mặt phẳng hay một mặt phẳng và một đường thẳng mà một trong hai yếu tố đã cho có vị trí đặc biệt.

Bài toán 1: Cho mặt phẳng $\mathcal{P}$ ($a \cap c$) và đường thẳng chiếu đứng d . Hãy xác định giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng $\mathcal{P}$ (hình 45).

Vì d là đường thẳng chiếu đứng, do đó giao điểm I của d với $\mathcal{P}$ có hình chiếu đứng $I_1 \equiv d_1$ và I còn là một điểm của mặt phẳng $\mathcal{P}$, dễ dàng suy ra I_2 khi đã biết I_1 . Hình 45, vẽ qua I_1 đường thẳng E_1F_1 , ở đó $E_1 \in a_1$ và $F_1 \in c_1$ lần lượt là hình chiếu đứng của hai điểm E và F thuộc a và c . Hình chiếu bằng của giao điểm I cần xác định là $I_2 = E_2F_2 \cap d_2$.

Cặp điểm (I_1, I_2) biểu diễn giao điểm I của d với $\mathcal{P}$.



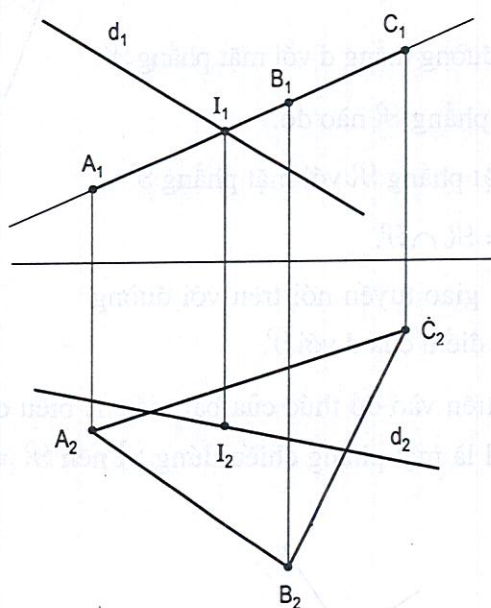
Hình 45

Bài toán 2: Cho mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$ (A, B, C) và đường thẳng d bất kỳ. Hãy xác định giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng $\mathcal{R}$ (hình 46).

Vì $\mathcal{R}$ (A, B, C) là mặt phẳng chiếu đứng, do đó giao điểm I của đường thẳng d với mặt phẳng $\mathcal{R}$ có hình chiếu đứng $I_1 = (A_1B_1C_1) \cap d_1$

Từ I_1 suy ra $I_2 \in d_2$.

Cặp điểm (I_1, I_2) biểu diễn giao điểm I của d với $\mathcal{R}$ (ABC).



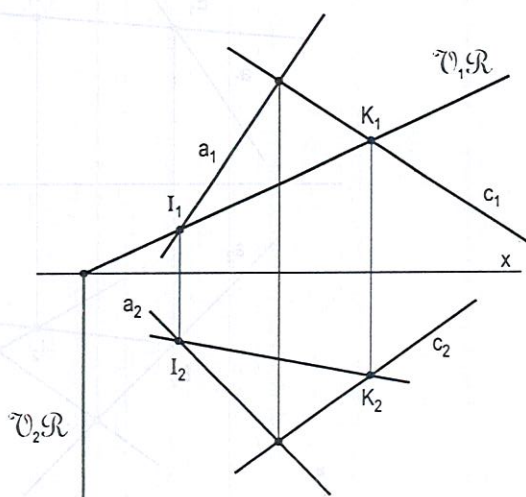
Hình 46

Bài toán 3: Cho mặt phẳng $\mathcal{P}$ (a,c) và mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$ ($\mathcal{V}_1 \mathcal{R}$, $\mathcal{V}_2 \mathcal{R}$). Hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng đã cho (hình 47).

Theo bài toán 2, dễ dàng tìm được các giao điểm I và K của hai đường thẳng a và c (thuộc $\mathcal{P}$) với mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$.

Vậy IK là giao tuyến hai mặt phẳng đã cho :

$$IK = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}.$$



Hình 47

1.2. Tổng quát

Đó là hai bài toán vị trí cơ bản mà các yếu tố cho trước không có gì đặc biệt, chúng ở vị trí bất kỳ trong không gian.

Bài toán 1: Cho đường thẳng d và mặt phẳng $\mathcal{P}$ ($a \cap c$) bất kỳ. Hãy xác định giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng $\mathcal{P}$.

Ở đây, nhắc lại trình tự giải bài toán trong hình học không gian phổ thông.

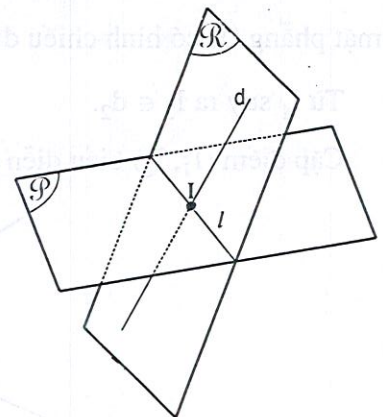
Để có giao điểm I của đường thẳng d với mặt phẳng $\mathcal{P}$.

- Qua d dựng một mặt phẳng $\mathcal{R}$ nào đó.
- Vẽ giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{R}$ với mặt phẳng $\mathcal{P}$

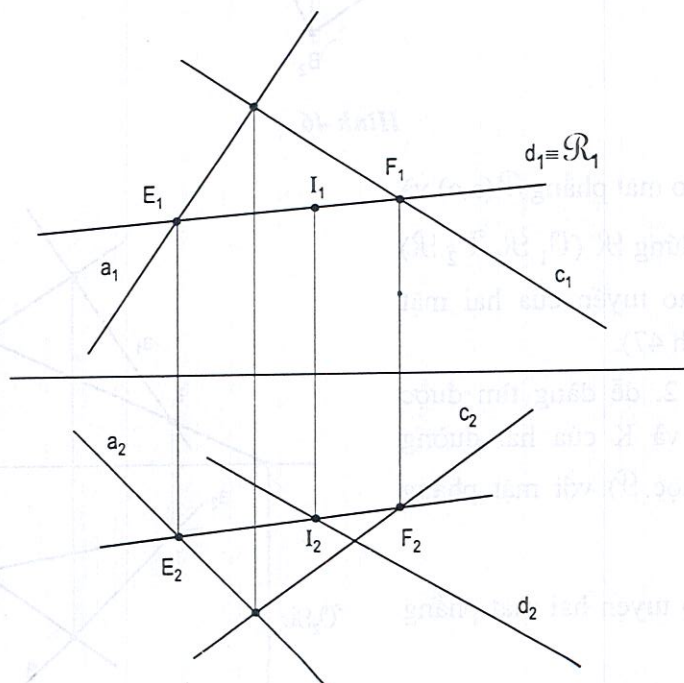
$$l = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}.$$

- Tìm giao điểm I của giao tuyến nói trên với đường thẳng d . Đó chính là giao điểm của d với $\mathcal{P}$.

Ứng dụng 3 bước nói trên vào đồ thức của bài toán 1, biểu diễn cách giải bài toán, ở đó mặt phẳng dựng qua d là mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$ nên $\mathcal{R}_1 \equiv d_1$ ($\mathcal{R}$ gọi là mặt phẳng phụ trợ).



Hình 48a



Hình 48b

Giao tuyến của mặt phẳng phụ trợ $\mathcal{R}$ với mặt phẳng $\mathcal{P}$ được xác định dễ dàng (còn gọi là giao tuyến phụ)

$$EF = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}$$

Giao tuyến phụ trợ EF và đường thẳng d cùng thuộc $\mathcal{R}$ cắt nhau tại I .

$$I_2 = E_2F_2 \cap d_2 \text{ suy ra } I_1 \in d_1$$

Cặp điểm (I_1, I_2) biểu diễn giao điểm I của d với $\mathcal{P}$.

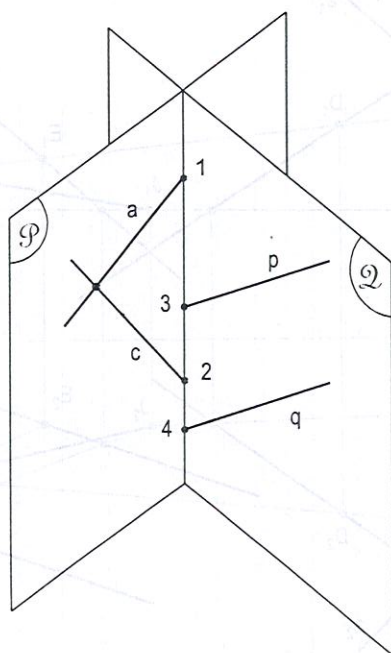
Bài toán 2: Cho mặt phẳng $\mathcal{P}$ ($a \cap b$) và mặt phẳng $\mathcal{Q}$ ($m \cap n$) bất kỳ. Hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng đã cho.

Hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ mà không song song nhau thì chúng cắt nhau theo một đường thẳng l .

Để xác định đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ phải tìm được hai điểm chung của chúng.

Muốn có một điểm chung của hai mặt phẳng có thể làm theo một trong hai cách sau đây:

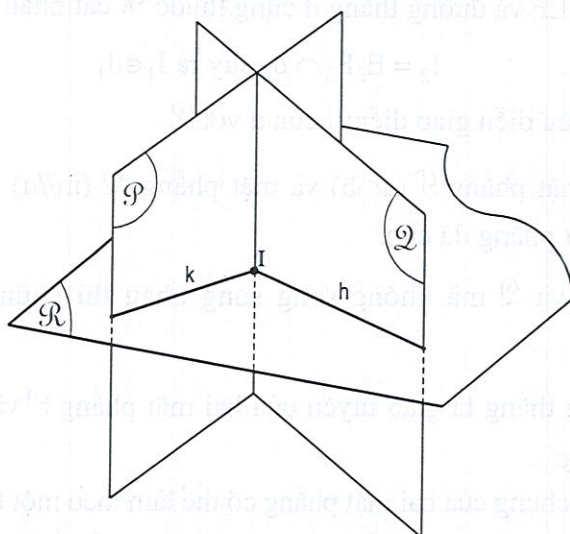
Cách thứ nhất: Xác định giao điểm của một đường thẳng thuộc mặt phẳng này với mặt phẳng kia (Bài toán vẽ giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng đã biết). Hình 49 các điểm 1 và 2 là giao điểm của a và b với $\mathcal{Q}$, các điểm 3 và 4 là giao điểm của m và n với $\mathcal{P}$. Các điểm 1, 2, 3, 4 đều thuộc giao tuyến của $\mathcal{P}$ với $\mathcal{Q}$.



Hình 49

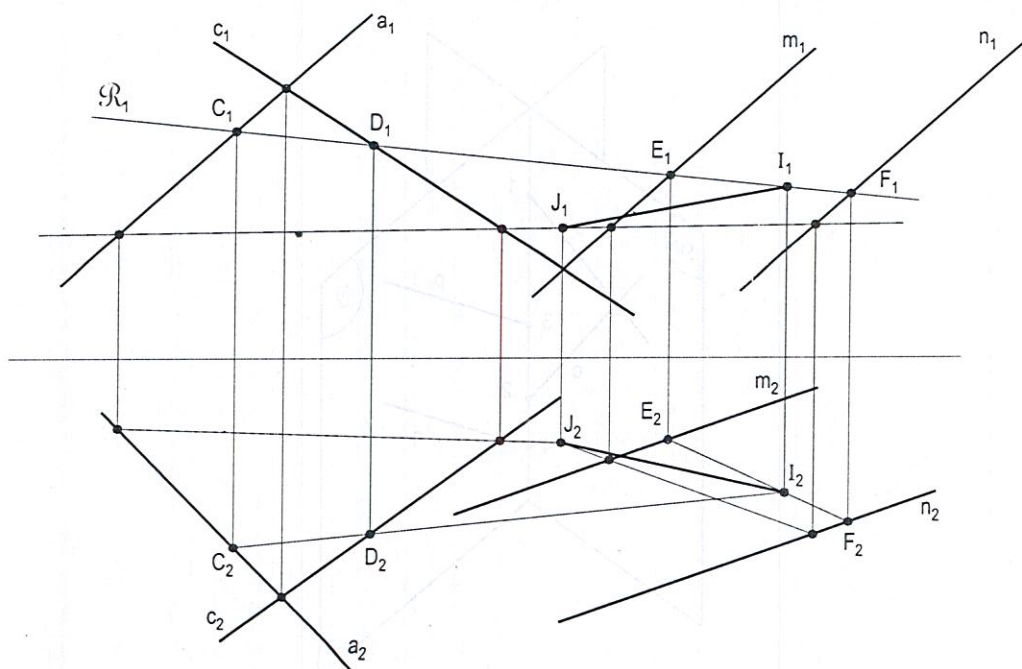
Cách thứ hai: Cắt cả hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ bởi mặt phẳng $\mathcal{R}$.

Giả sử k và h lần lượt là giao tuyến của $\mathcal{R}$ với $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ (hình 50). Hai đường thẳng k và h cắt nhau tại điểm I là một điểm chung của hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$.



Hình 50

Trên hình 51 biểu diễn lời giải bài toán theo cách thứ hai, ở đó vẽ mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}_1$ có hình chiếu đứng là $\mathcal{R}_1$.



Hình 51

Các điểm C, D, E, F lần lượt là các giao điểm của a, b, m, n với $\mathcal{R}$. Nghĩa là:

$$CD = \mathcal{R} \cap \mathcal{P} \quad \text{và} \quad EF = \mathcal{R} \cap \mathcal{Q}$$

Hai đường thẳng CD và EF cắt nhau tại điểm I là điểm chung thứ nhất của $\mathcal{P}$

và $\mathcal{Q}$.

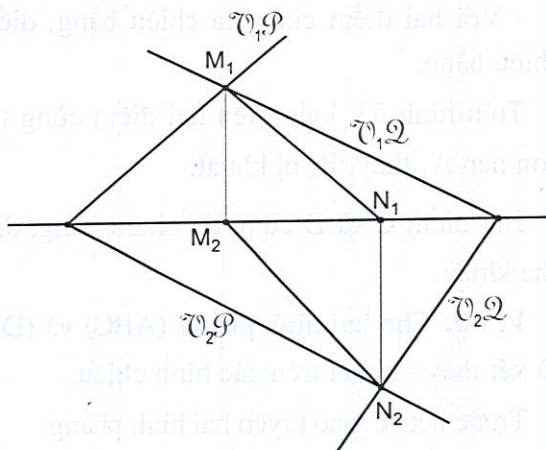
Để có điểm chung thứ hai J thực hiện lần nữa tương tự như trên.

$$IJ = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$$

Hình 52 biểu diễn hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ bởi các vết của chúng.

Việc vẽ giao tuyến MN của hai mặt phẳng được thấy rõ trên hình vẽ

$$MN = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$$



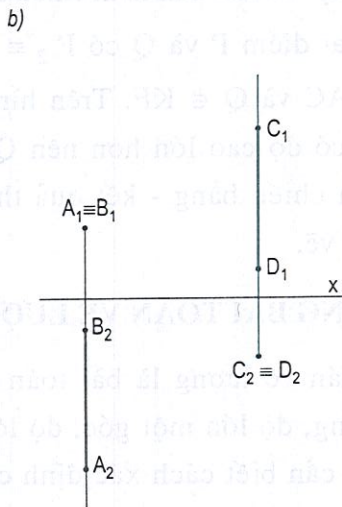
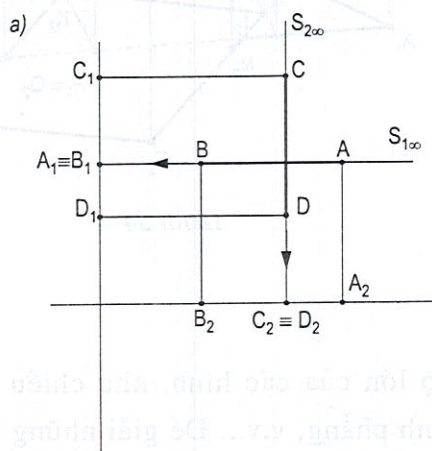
Hình 52

1.3. Xét thấy - khuất trên đồ thức

Để làm tăng tính trực quan cho hình biểu diễn theo phương pháp hình chiếu thẳng góc; người ta thường biểu diễn sự thấy - khuất trên các hình chiếu dựa trên hai quy ước sau đây:

- Khi xét thấy - khuất trên hình chiếu đứng, mắt người quan sát được coi là ở điểm vô tận của phương chiếu đứng, và khi xét thấy khuất trên hình chiếu bằng thì mắt người quan sát coi là ở điểm vô tận của phương chiếu bằng.

- Các mặt phẳng hình chiếu và các đối tượng được biểu diễn coi là đục (không trong suốt).



Hình 53

Từ hai quy ước trên dẫn đến kết luận sau:

- Với hai điểm cùng tia chiếu đứng, điểm nào có độ xa lớn hơn (gần mắt người quan sát hơn) là thấy trên hình chiếu đứng (điểm còn lại bị khuất).
- Với hai điểm cùng tia chiếu bằng, điểm nào có độ cao lớn hơn là thấy trên hình chiếu bằng.

Trên hình 53, biểu diễn hai điểm cùng tia chiếu đứng A và B, điểm A có độ xa lớn hơn nên A_1 thấy, B_1 bị khuất.

Hai điểm C và D cùng tia chiếu bằng, điểm C có độ cao lớn hơn nên C_2 thấy, D_2 bị che khuất.

Ví dụ: Cho hai hình phẳng (ABC) và (DEFG). Hãy vẽ giao tuyến hai hình phẳng đó và xét thấy - khuất trên các hình chiếu.

Trước hết vẽ giao tuyến hai hình phẳng.

$$I = DE \cap (ABC)$$

$$K = FG \cap (ABC)$$

$$IK = (ABC) \cap (DEFG)$$

Xét thấy khuất trên hình chiếu đứng:

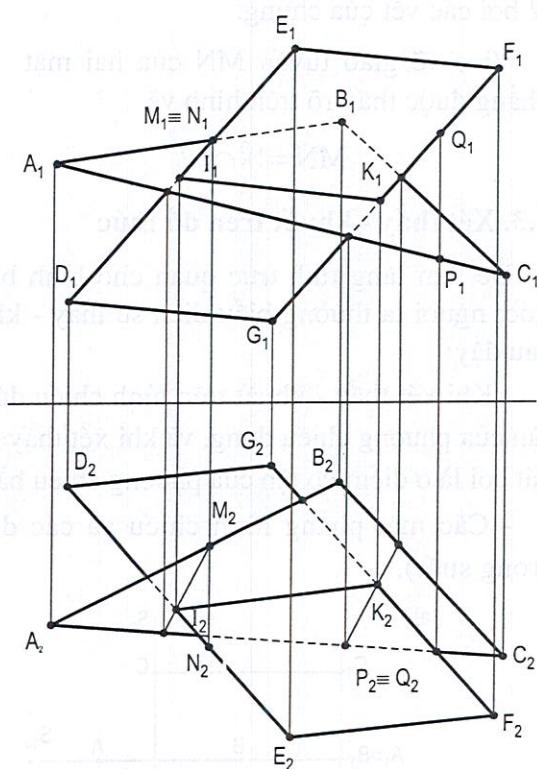
Xét hai điểm M và N

Có $M_1 \equiv N_1$, ở đó $M \in AB$ và $N \in IE$

Trên hình 54 điểm N có độ xa lớn hơn nên N thấy trên hình chiếu đứng cho kết quả như hình vẽ.

Xét thấy - khuất trên hình chiếu bằng:

Xét hai điểm P và Q có $P_2 \equiv Q_2$, ở đó $P \in AC$ và $Q \in KF$. Trên hình 54, điểm Q có độ cao lớn hơn nên Q thấy trên hình chiếu bằng - kết quả thấy rõ như hình vẽ.



Hình 54

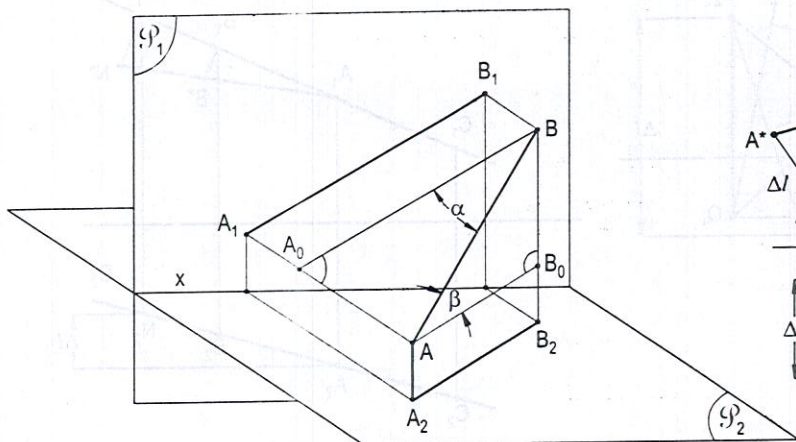
§2. NHỮNG BÀI TOÁN VỀ LƯỢNG

Bài toán về lượng là bài toán xét về độ lớn của các hình, như chiều dài một đoạn thẳng, độ lớn một góc, độ lớn một hình phẳng, v.v... Để giải những bài toán về lượng cần biết cách xác định chiều dài một đoạn thẳng, vẽ đường thẳng vuông góc với mặt phẳng...

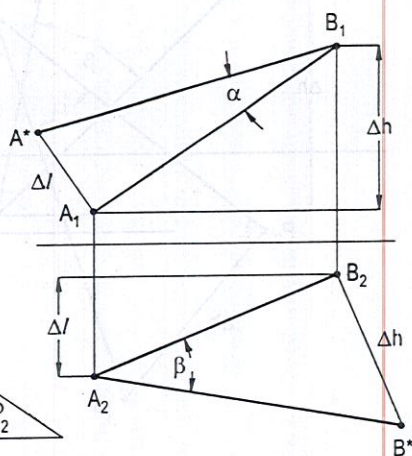
2.1. Xác định chiều dài một đoạn thẳng

Bài toán: Cho đoạn thẳng AB (A_1B_1, A_2B_2) bất kỳ hãy xác định chiều dài thật của đoạn thẳng AB.

Trước hết, trở lại việc thành lập đồ thức của đoạn AB. Trên hình 55a, chiếu thẳng góc đoạn AB lên mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathcal{P}_1$ được đoạn A_1B_1 . Trong hình thang vuông A_1B_1BA vẽ $BA_0 \parallel A_1B_1$ được tam giác vuông A_0AB có một cạnh góc vuông $\overline{A_0B} = \overline{A_1B_1}$ và cạnh góc vuông còn lại $\overline{A_0A} = \overline{AA_1} - \overline{BB_1} = \overline{A_2A_x} - \overline{B_2B_x}$ (AB là cạnh huyền của tam giác vuông đó).



Hình 55a



Hình 55b

Vậy, chiều dài đoạn AB là cạnh huyền một tam giác vuông mà một cạnh góc vuông bằng hình chiếu đứng của AB là A_1B_1 và cạnh góc vuông còn lại bằng hiệu độ xa của hai điểm A và B.

Hình 55b, chỉ ra cách vẽ chiều dài đoạn AB: Vẽ $A_1A^* \perp A_1B_1$, sao cho $\overline{A_1A^*} = \Delta l$ (hiệu độ xa của A và B) chiều dài thật của AB là $\overline{A^*B_1}$.

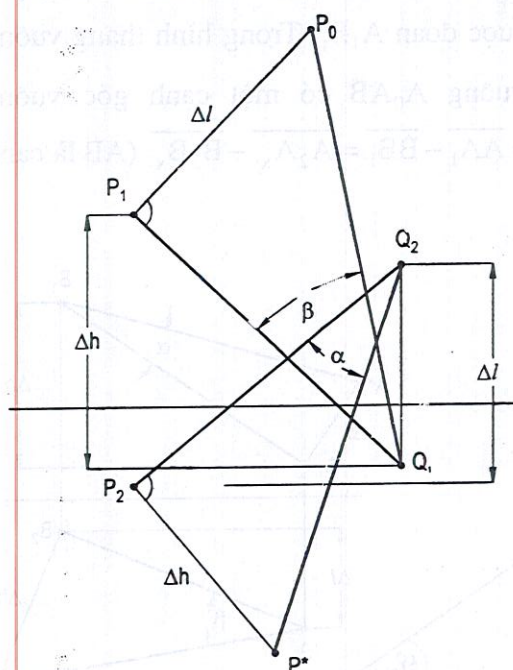
Việc vẽ chiều dài thật của AB như trên đồng thời cho độ lớn góc nghiêng của đường thẳng AB với mặt phẳng hình chiếu đứng.

$$\alpha = (\overline{A_1B_1}, \overline{A^*B_1}) = (\overline{AB}, \mathcal{P}_1).$$

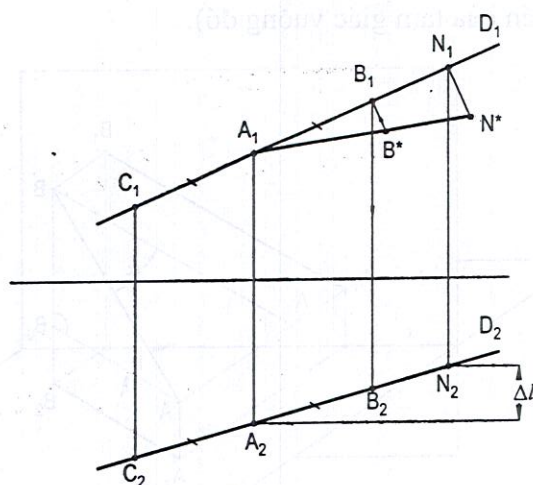
Lập luận tương tự như trên, trong hình thang vuông A_2B_2BA , vẽ $AB_0 \parallel A_2B_2$ được tam giác vuông B_0BA cũng có kết luận sau: Chiều dài đoạn AB là cạnh huyền một tam giác vuông mà một cạnh góc vuông bằng hình chiếu bằng của AB là A_2B_2 và cạnh góc vuông còn lại bằng hiệu độ cao của hai điểm A và B.

Hình 55b, cũng chỉ rõ cách vẽ chiều dài thật của AB: Vẽ $B_2B^* \perp B_2A_2$ sao cho $\overline{B_2B^*} = \Delta h$ (hiệu độ cao của A và B) chiều dài thật của AB là $\overline{B^*A_2}$

$$\beta = (A_2B^*, A_2B_2) = (AB, \mathcal{P}_2)$$



Hình 56



Hình 57

Ví dụ 1: Xác định chiều dài đoạn PQ và góc nghiêng của đường thẳng PQ với các mặt phẳng hình chiếu. Trên hình 56 biểu diễn điểm P có độ cao, độ xa dương và điểm Q có độ cao, độ xa đều là âm.

Việc xác định hiệu độ cao Δh và hiệu độ xa Δl của hai điểm P và Q thấy rõ trên hình vẽ.

Chiều dài thật của PQ là $\overline{P_0Q_1} = \overline{P^*Q_2}$

$$\alpha = (\overline{P_0Q_1}, P_1Q_1) = (PQ, \mathcal{P}_1)$$

$$\beta = (\overline{P^*Q_2}, P_2Q_2) = (PQ, \mathcal{P}_2).$$

Ví dụ 2: Cho đường thẳng d. Hãy xác định trên đường thẳng d điểm B đúng cách điểm A $\in d$ cho trước một đoạn bằng 15 đơn vị (hình 57).

Trên hình vẽ, lấy điểm N $\in d$ bất kỳ và xác định chiều dài thật của AN là $\overline{A_1N^*}$

Lấy trên $\overline{A_1N^*}$ điểm B* sao cho $\overline{A_1B^*} = 15$ đơn vị, từ B* kẻ vuông góc với d_1 tại B₁ suy ra B₂ $\in d_2$.

Như vậy, B là một điểm thuộc đường thẳng d cách A một đoạn 15 đơn vị. Bài toán còn nghiệm thứ hai là điểm C đối xứng với B qua tâm A.

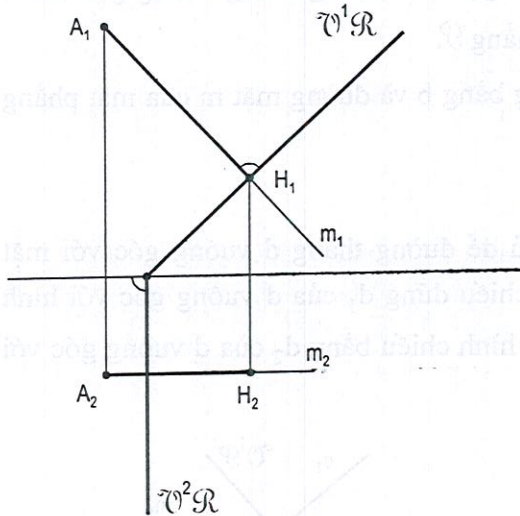
2.2. Vẽ đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

a) Đối với các mặt phẳng chiếu

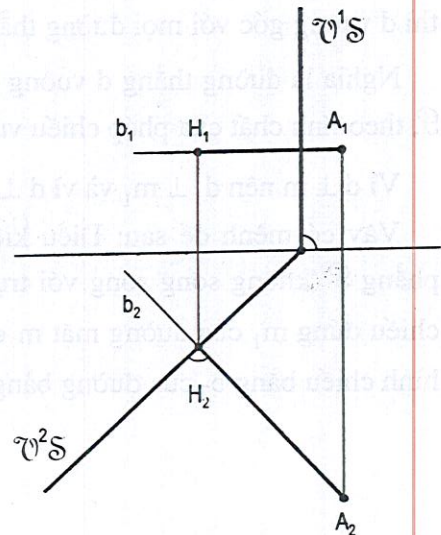
• Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chiếu đứng là đường mặt. Hình 58, biểu diễn đường mặt đi qua điểm A vuông góc với mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$.

$$A_1 \in m_1 \perp \mathcal{V}^1 \mathcal{R}; \quad A_2 \in m_2 // x$$

Đường thẳng m cắt mặt phẳng $\mathcal{R}$ tại H. Chiều dài $\overline{A_1 H_1}$ là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$.



Hình 58



Hình 59

• Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chiếu bằng là đường bằng.

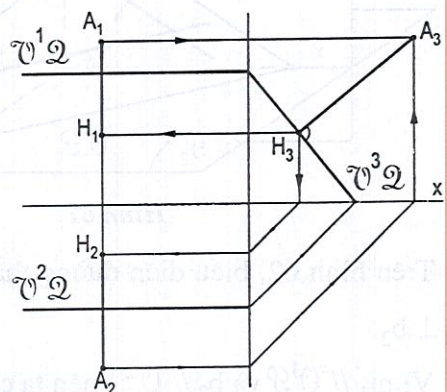
Hình 59, biểu diễn đường bằng b đi qua điểm A vuông góc với mặt phẳng chiếu bằng $\mathcal{S}$.

$$A_1 \in b_1 // x; \quad A_2 \in b_2 \perp \mathcal{V}^2 \mathcal{S}$$

Đường thẳng b cắt mặt phẳng $\mathcal{S}$ tại điểm H. Chiều dài $\overline{A_2 H_2}$ là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng chiếu bằng $\mathcal{S}$.

• Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chiếu cạnh (mặt phẳng song song với trục x) là đường cạnh.

Hình 60, biểu diễn mặt phẳng chiếu cạnh $\mathcal{Q}$ có $\mathcal{V}^1 \mathcal{Q} // \mathcal{V}^2 \mathcal{Q} // x$ và điểm A(A_1, A_2).



Hình 60

Để vẽ qua A đường cạnh vuông góc với mặt phẳng $\mathcal{Q}$ ta vẽ hình chiếu cạnh của A và $\mathcal{Q}$ là A_3 và $\mathcal{Q}^3$. Qua A_3 kẻ đường thẳng vuông góc với $\mathcal{Q}^3$ tại H_3 - đó là hình chiếu cạnh chân đường vuông góc kẻ từ A tới $\mathcal{Q}$.

Từ H_3 suy ra H_1 và H_2 trên đường dóng của A. AH là đường cạnh vuông góc với mặt phẳng $\mathcal{Q}$. Chiều dài A_3H_3 là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\mathcal{Q}$.

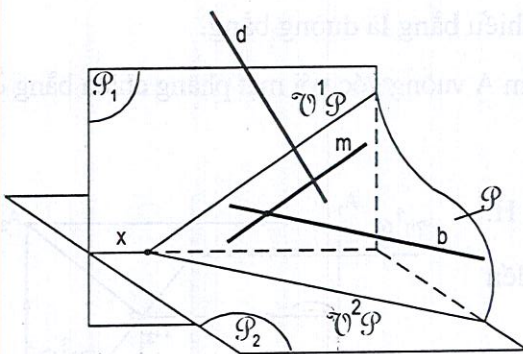
b) Đối với mặt phẳng bất kỳ

Giả sử có một mặt phẳng $\mathcal{P}$ bất kỳ (hình 61); gọi d là đường thẳng vuông góc với $\mathcal{P}$ thì d vuông góc với mọi đường thẳng của mặt phẳng $\mathcal{P}$.

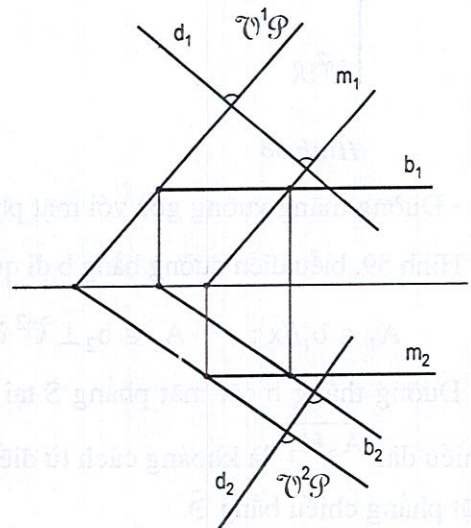
Nghĩa là đường thẳng d vuông góc với đường bằng b và đường mặt m của mặt phẳng $\mathcal{P}$, theo tính chất của phép chiếu vuông góc thì:

Vì $d \perp m$ nên $d_1 \perp m_1$ và vì $d \perp b$ nên $d_2 \perp b_2$

Vậy có mệnh đề sau: Điều kiện cần và đủ để đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $\mathcal{P}$ (không song song với trục x) là hình chiếu đứng d_1 của d vuông góc với hình chiếu đứng m_1 của đường mặt $m \in \mathcal{P}$ đồng thời hình chiếu bằng d_2 của d vuông góc với hình chiếu bằng b_2 của đường bằng $b \in \mathcal{P}$.



Hình 61



Hình 62

Trên hình 62, biểu diễn đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $\mathcal{P}$, ở đó $d_1 \perp m_1$ và $d_2 \perp b_2$.

Vì $m_1 // \mathcal{P}^1$ và $b_2 // \mathcal{P}^2$ nên ta cũng có:

$$d \perp \mathcal{P} \Leftrightarrow d_1 \perp \mathcal{P}^1 \text{ và } d_2 \perp \mathcal{P}^2$$

Ví dụ 1: Cho mặt phẳng $\mathcal{R}(p, q)$. Qua điểm A vẽ đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $\mathcal{R}$.

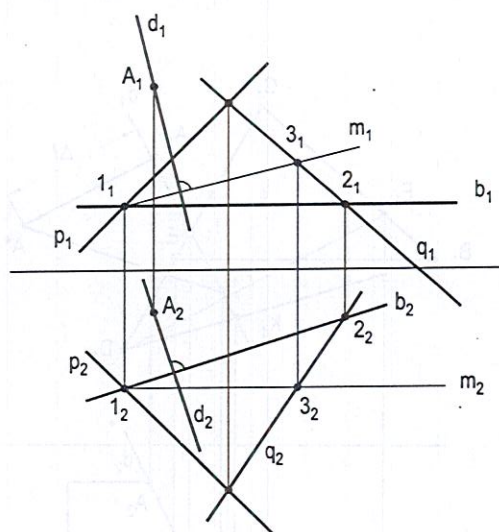
Trước hết, vẽ trong mặt phẳng $\mathcal{R}$ một đường bằng b và một đường mặt m. Hình 63 đường bằng b xác định bởi 1 và 2, đường mặt m xác định bởi 1 và 3.

Qua A_1 vẽ $d_1 \perp m_1$

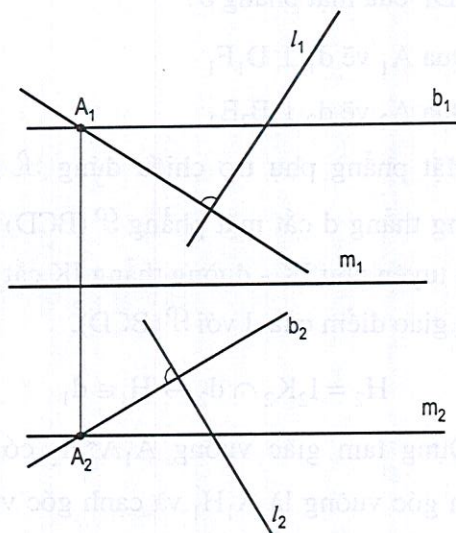
Qua A_2 vẽ $d_2 \perp b_2$

Cặp đường thẳng (d_1, d_2) biểu diễn đường thẳng d đi qua A và vuông góc với $\mathcal{R}$.

Biết cách vẽ đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, cũng vẽ được mặt phẳng vuông góc với đường thẳng.



Hình 63



Hình 64

Ví dụ 2: Cho đường thẳng $l(l_1, l_2)$. Qua A xác định mặt phẳng $\mathcal{Q}$ vuông góc với đường thẳng l .

Qua A vẽ hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng l , chúng sẽ xác định mặt phẳng $\mathcal{Q}$ cần vẽ. Hình 64 vẽ một đường bằng b đi qua A có $b_2 \perp l_2$, và một đường mặt m đi qua A có $m_1 \perp l_1$.

$$\mathcal{Q}(b, m) \perp l$$

2.3. Một số bài toán lượng

Bài toán thứ nhất: Cho mặt phẳng $\mathcal{P}(BCD)$ và điểm A. Hãy xác định khoảng cách từ A đến $\mathcal{P}(ABC)$.

Để xác định khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\mathcal{P}$ thực hiện như sau (hình 65).

- Qua A vẽ đường thẳng $d \perp \mathcal{P}$.
- Tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng $\mathcal{P}$.

$$H = d \cap \mathcal{P}.$$

- Vẽ chiều dài thật đoạn AH, đó là khoảng cách từ A đến $\mathcal{P}$.

Trên hình 66 vẽ đường bằng BE và đường mặt DF của mặt phẳng $\mathcal{P}$.

Qua A_1 vẽ $d_1 \perp D_1F_1$

Qua A_2 vẽ $d_2 \perp B_2E_2$

Mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng $\mathcal{R}$ chứa đường thẳng d cắt mặt phẳng $\mathcal{P}$ (BCD) theo giao tuyến phụ IK - đường thẳng IK cắt d tại H là giao điểm của d với $\mathcal{P}$ (BCD).

$$H_2 = I_2K_2 \cap d_2 \rightarrow H_1 \in d_1$$

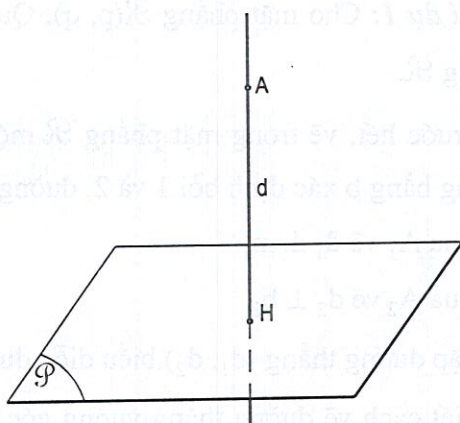
Dựng tam giác vuông $A_1A^*H_1$ có một cạnh góc vuông là A_1H_1 và cạnh góc vuông còn lại A_1A^* bằng hiệu độ xa của A và H. A^*H_1 là chiều dài thật của AH, đó chính là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\mathcal{P}$ (BCD).

Bài toán thứ hai: Cho đường thẳng d và điểm A. Hãy xác định khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d.

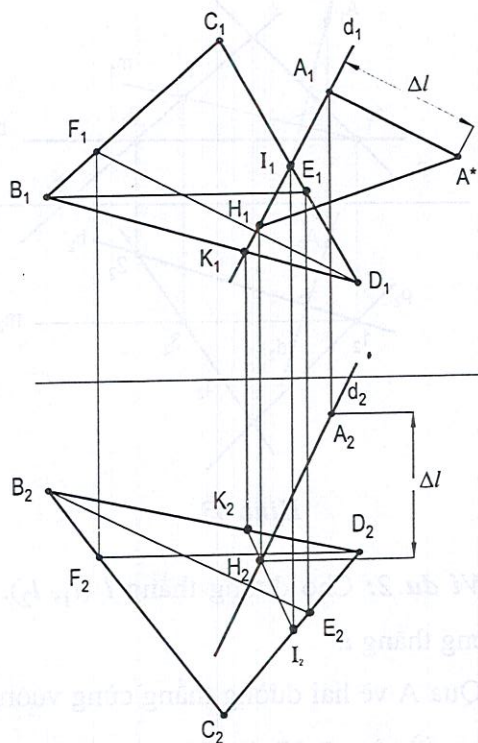
Để xác định khoảng cách từ A đến đường thẳng d làm như sau:

- Qua A dựng mặt phẳng $\mathcal{R}$ vuông góc với d.
- Tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng $\mathcal{R}$.

$$K = d \cap \mathcal{R}$$



Hình 65

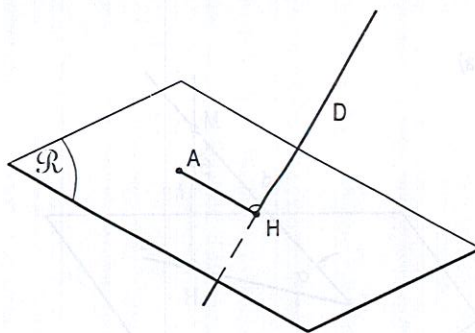


Hình 66

- Vẽ chiều dài thật đoạn AK, đó là khoảng cách từ A đến d (hnh 67).

Trên hình 68 mặt phẳng $\mathcal{R}$ được xác định bởi đường bằng b và đường mặt m vẽ qua A và vuông góc với d.

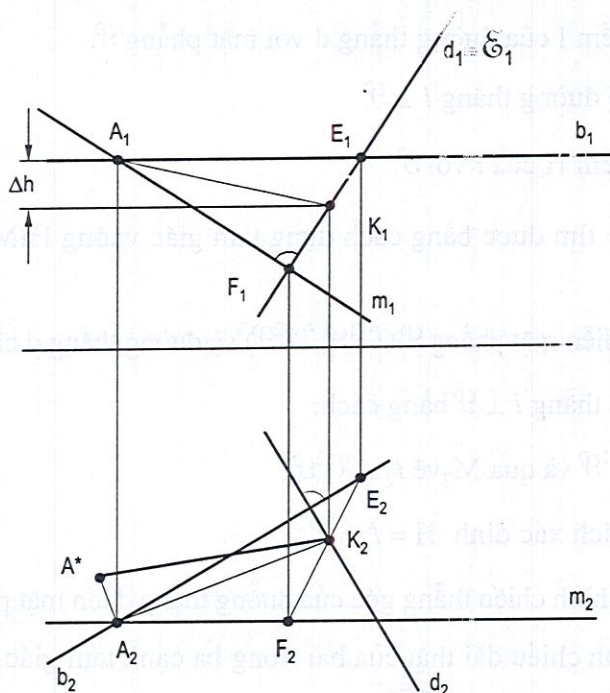
Mặt phẳng phụ trợ chiếu đúng $\mathcal{C}$ đi qua d cắt R theo giao tuyến phụ EF cho giao điểm K của đường thẳng d với mặt phẳng $\mathcal{R}$.



Hình 67

$$K_2 = E_2 F_2 \cap d_2 \rightarrow K_1 \in d_1.$$

Vẽ tam giác vuông $A_2 A^* K_2$ vuông tại A_2 có cạnh $\overline{A_2 K_2}$ bằng hiệu độ cao hai điểm A và K chiều dài $\overline{A^* K_2}$ là khoảng cách từ A đến đường thẳng d.

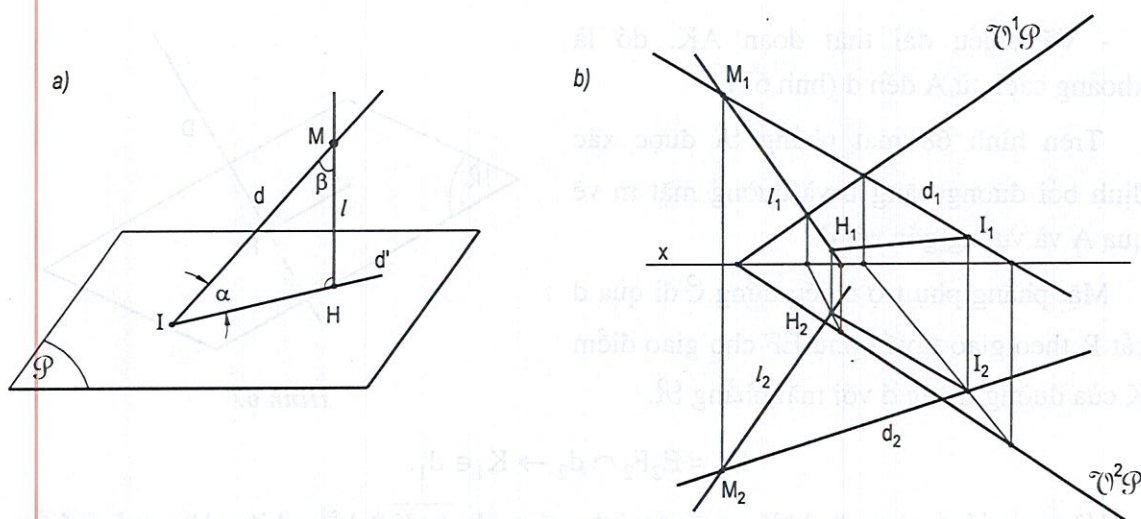


Hình 68

Bài toán thứ ba: Xác định độ lớn góc nghiêng của đường thẳng d và mặt phẳng $\mathcal{P}$ cho trước.

Góc của đường thẳng d và mặt phẳng $\mathcal{P}$ là góc hợp bởi đường thẳng d và hình chiếu thẳng góc của d lên $\mathcal{P}$ (hình 69a).

$$\alpha = (d, \mathcal{P}) = (d, d')$$



Hình 69

Có thể thực hiện bài toán như sau:

- Xác định giao điểm I của đường thẳng d với mặt phẳng $\mathcal{P}$.
- Từ điểm $M \in d$ vẽ đường thẳng $l \perp \mathcal{P}$
- Xác định giao điểm H của l với $\mathcal{P}$.
- Độ lớn $\alpha = \widehat{MIH}$ tìm được bằng cách dựng tam giác vuông HIM nhờ chiều dài thật của các cạnh.

Trên hình 69 biểu diễn mặt phẳng $\mathcal{P} (\mathcal{T}^1\mathcal{P}, \mathcal{T}^2\mathcal{P})$ và đường thẳng d cắt $\mathcal{P}$ tại I.

Từ $M \in d$ vẽ đường thẳng $l \perp \mathcal{P}$ bằng cách:

Qua M_1 vẽ $l_1 \perp \mathcal{T}^1\mathcal{P}$ và qua M_2 vẽ $l_2 \perp \mathcal{T}^2\mathcal{P}$.

Trên hình chỉ rõ cách xác định $H = l \cap \mathcal{P}$

Đường thẳng IH là hình chiếu thẳng góc của đường thẳng d lên mặt phẳng $\mathcal{P}$.

Bạn đọc tự xác định chiều dài thật của hai trong ba cạnh tam giác vuông HIM (vuông tại H) để dựng độ lớn thật góc $\alpha = \widehat{MIH}$.

Dễ dàng nhận thấy rằng góc $\beta = (d, l)$ là góc phụ của góc α .

Bài toán thứ tư : Cho hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$, xác định độ lớn góc nhị diện phẳng $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$.

Độ lớn góc nhị diện phẳng $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ bằng góc hợp bởi hai đường thẳng vẽ qua một điểm bất kỳ trong không gian lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đã cho.

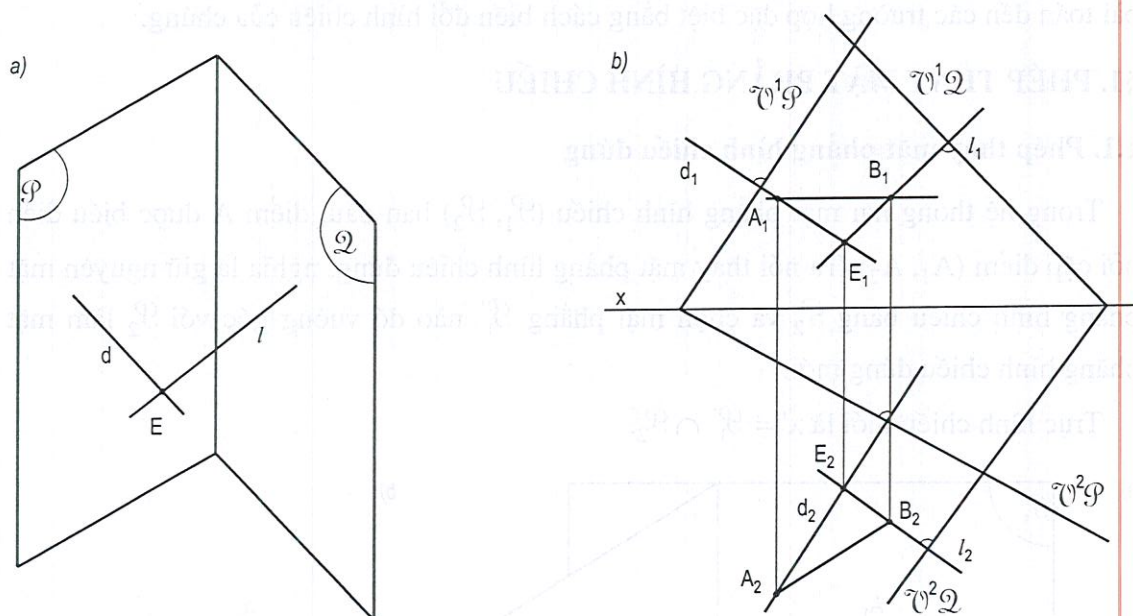
$$\theta = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = (d, l)$$

Ở đó $d \perp \mathcal{P}$ và $l \perp \mathcal{Q}$.

Hình 70b, biểu diễn hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ bởi các vết của chúng. Từ điểm E bất kỳ vẽ đường thẳng $d \perp \mathcal{P}$ và đường thẳng $l \perp \mathcal{Q}$.

Lấy trên đường thẳng d điểm A và lấy trên đường thẳng l điểm B sao cho AB là đường bằng (hay đường mặt).

Bạn đọc tự xác định hình thật của hai cạnh EA và EB để dựng độ lớn thật tam giác EAB. Độ lớn góc tại E là độ lớn góc nhị diện phẳng $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$.



Hình 70

Chương 3

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI HÌNH CHIẾU

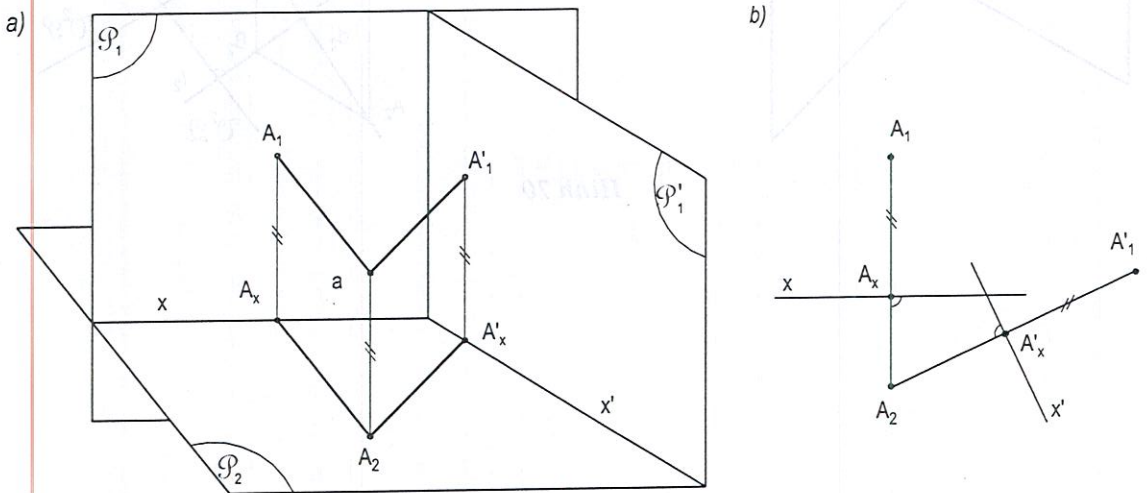
Khi giải những bài toán về vị trí hay về lượng các đối tượng cho trước ở vị trí tổng quát thường dẫn đến lời giải dài, hình vẽ phức tạp. Để đơn giản hơn người ta thường đưa bài toán đến các trường hợp đặc biệt bằng cách biến đổi hình chiếu của chúng.

§1. PHÉP THAY MẶT PHẪNG HÌNH CHIẾU

1.1. Phép thay mặt phẳng hình chiếu đứng

Trong hệ thống hai mặt phẳng hình chiếu $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ ban đầu, điểm A được biểu diễn bởi cặp điểm (A_1, A_2) . Ta nói thay mặt phẳng hình chiếu đứng, nghĩa là giữ nguyên mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}_2$ và chọn mặt phẳng $\mathcal{P}'_1$ nào đó vuông góc với $\mathcal{P}_2$ làm mặt phẳng hình chiếu đứng mới.

Trục hình chiếu mới là $x' = \mathcal{P}'_1 \cap \mathcal{P}_2$.



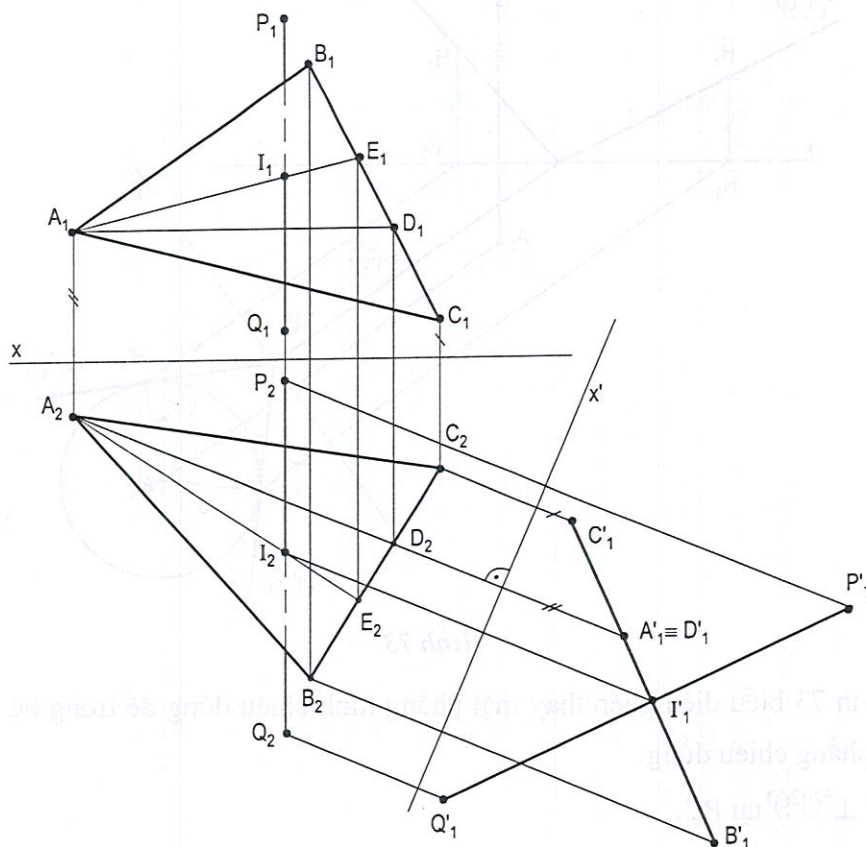
Hình 71

Gọi A'_1 là hình chiếu thẳng góc của A lên $\mathcal{P}'_1$ và sau khi quay $\mathcal{P}'_1$ quanh x' trùng với $\mathcal{P}_2$ để quay $\mathcal{P}_2$ trùng với $\mathcal{P}'_1$ có đồ thức cả hai hệ thống như trên hình 71b.

Vậy, khi thay mặt phẳng hình chiếu đứng, hình chiếu bằng A_2 của điểm A không thay đổi, với trục hình chiếu mới x' đã chọn ta có hình chiếu đứng mới A'_1 của A sao cho độ cao của A trong hệ thống mới bằng độ cao của A trong hệ thống ban đầu.

Hình 71b, vẽ từ A_2 đường dóng vuông góc với trục x' đã chọn và lấy A'_1 sao cho $\overline{A'_1 A_{x'}} = \overline{A_1 A_x}$.

Ví dụ 1: Xác định giao điểm của đường cạnh PQ với mặt phẳng ABC.



Hình 72

Bài toán giải quyết được dễ dàng nếu (ABC) là mặt phẳng chiếu. Hình 72 biểu diễn phép thay mặt phẳng hình chiếu đứng để trong hệ thống mới (ABC) là mặt phẳng chiếu đứng. Muốn vậy, phải chọn mặt phẳng hình chiếu đứng mới đồng thời vuông góc với (ABC) và $\mathcal{P}_2$ nghĩa là nó phải vuông góc với đường bằng AD của (ABC).

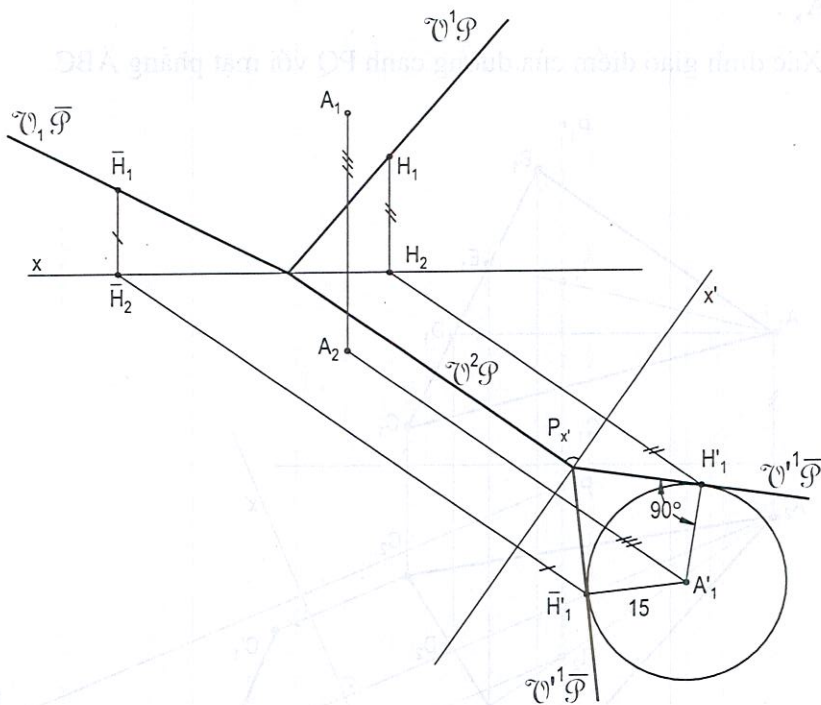
Trên đồ thức chọn trục $x' \perp A_2 D_2$.

Vẽ hình chiếu đứng mới của A, B, C, P, Q lần lượt là $A'_1, B'_1, C'_1, P'_1, Q'_1$ - ở đó A'_1, B'_1, C'_1 thẳng hàng.

Hình chiếu đứng mới của giao điểm $I = PQ \cap (ABC)$ là :

$I'_1 = P'_1 Q'_1 \cap (A'_1, B'_1, C'_1)$. Từ $I'_2 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1$.

Ví dụ 2: Cho điểm $A (A_1, A_2)$ và vết bằng $\tau^2 \mathcal{P}$ của mặt phẳng $\mathcal{P}$. Hãy xác định vết đứng của $\mathcal{P}$. Biết A cách $\mathcal{P}$ một đoạn 15 đơn vị.



Hình 73

Trên hình 73 biểu diễn phép thay mặt phẳng hình chiếu đứng để trong hệ thống mới $\mathcal{P}'$ là mặt phẳng chiếu đứng.

Chọn $x' \perp \tau^2 \mathcal{P}$ tại P_x .

Vết đứng mới của $\mathcal{P}$ là đường thẳng đi qua P_x và tiếp xúc với đường tròn tâm A'_1 (hình chiếu đứng mới của A) bán kính 15 đơn vị.

Từ vết đứng mới của $\mathcal{P}$ suy ra vết đứng $\mathcal{P}$ của ở hệ thống ban đầu.

Bài toán có 2 nghiệm khi $\overline{P_x A'_1} > 15$ đơn vị

Bài toán có 1 nghiệm khi $\overline{P_x A'_1} = 15$ đơn vị

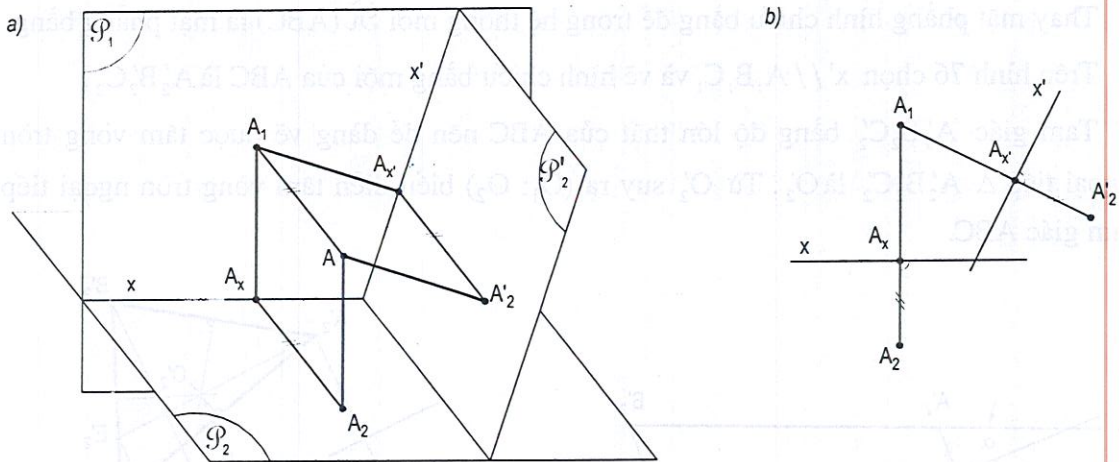
Bài toán vô nghiệm khi $\overline{P_x A'_1} < 15$ đơn vị

Bạn đọc tự liên hệ với một bài toán hình học không gian: Qua một đường thẳng cho trước xác định mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tâm O bán kính r .

1.2. Phép thay mặt phẳng hình chiếu bằng

Tương tự như trên, thay mặt phẳng hình chiếu bằng là giữ nguyên mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathcal{P}_1$ của hệ thống ban đầu và chọn mặt phẳng $\mathcal{P}_2$ nào đó vuông góc với $\mathcal{P}_1$ làm mặt phẳng hình chiếu bằng mới.

Trục hình chiếu mới $x' = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2'$



Hình 74

Gọi A_2' là hình chiếu thẳng góc của A lên $\mathcal{P}_2'$ và sau khi quay $\mathcal{P}_2'$ quanh trục x' trùng với $\mathcal{P}_1$ có đồ thức cả hai hệ thống như trên hình 74b.

Khi thay mặt phẳng hình chiếu bằng hình chiếu đứng A_1 của điểm A không thay đổi, với trục hình chiếu mới x' đã chọn ta có hình chiếu bằng mới A_2' của A sao cho độ xa của A trong hệ thống mới bằng độ xa của A trong hệ thống ban đầu.

Hình 74b vẽ từ A_1 đường dóng vuông góc với trục x' đã chọn và lấy A_2' sao cho $\overline{A_2'A_{x'}} = \overline{A_2A_{x'}}$.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng AB (A_1B_1, A_2B_2). Hãy xác định chiều dài của AB và góc nghiêng của nó với mặt phẳng hình chiếu đứng.

Nếu AB là một đường bằng thì hình chiếu bằng của nó là chiều dài thật đoạn AB và góc nghiêng của AB với mặt phẳng hình chiếu đứng bằng góc hợp bởi hình chiếu bằng của đường bằng với trục hình chiếu.

Hình 75 biểu diễn phép thay mặt phẳng hình chiếu bằng để trong hệ thống mới AB là đường bằng.

Chọn $x' \parallel A_1B_1$ và vẽ hình chiếu bằng mới của AB là $A_2' B_2'$.

$$|\overline{AB}| = \overline{A'_2B'_2}$$

$$\alpha = (AB, \mathcal{P}') = (A'_2B'_2, x')$$

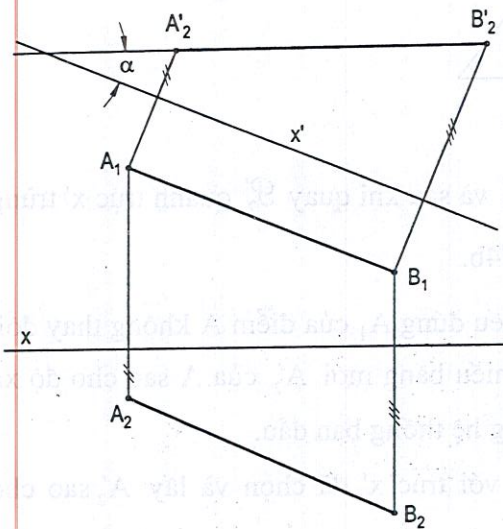
Ví dụ 2: Cho tam giác ABC thuộc mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$. Hãy xác định tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC là giao điểm các trung trực của ba cạnh tam giác ABC.

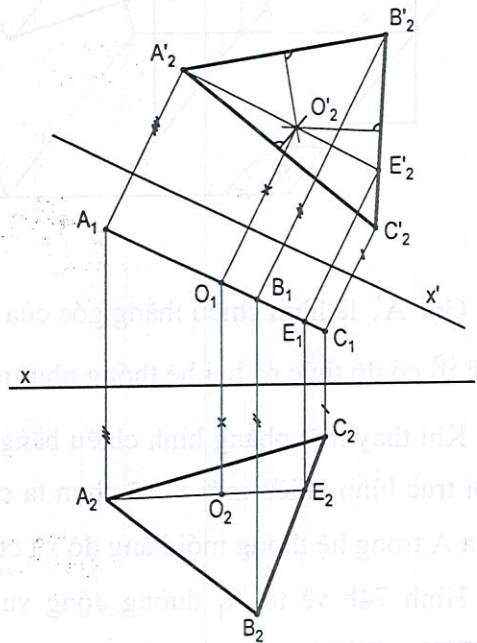
Thay mặt phẳng hình chiếu bằng để trong hệ thống mới $\mathcal{R}(ABC)$ là mặt phẳng bằng.

Trên hình 76 chọn $x' // A_1B_1C_1$ và vẽ hình chiếu bằng mới của ABC là $A'_2B'_2C'_2$.

Tam giác $A'_2B'_2C'_2$ bằng độ lớn thật của ABC nên dễ dàng vẽ được tâm vòng tròn ngoại tiếp $\Delta A'_2B'_2C'_2$ là O'_2 . Từ O'_2 suy ra $(O_1; O_2)$ biểu diễn tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Hình 75



Hình 76

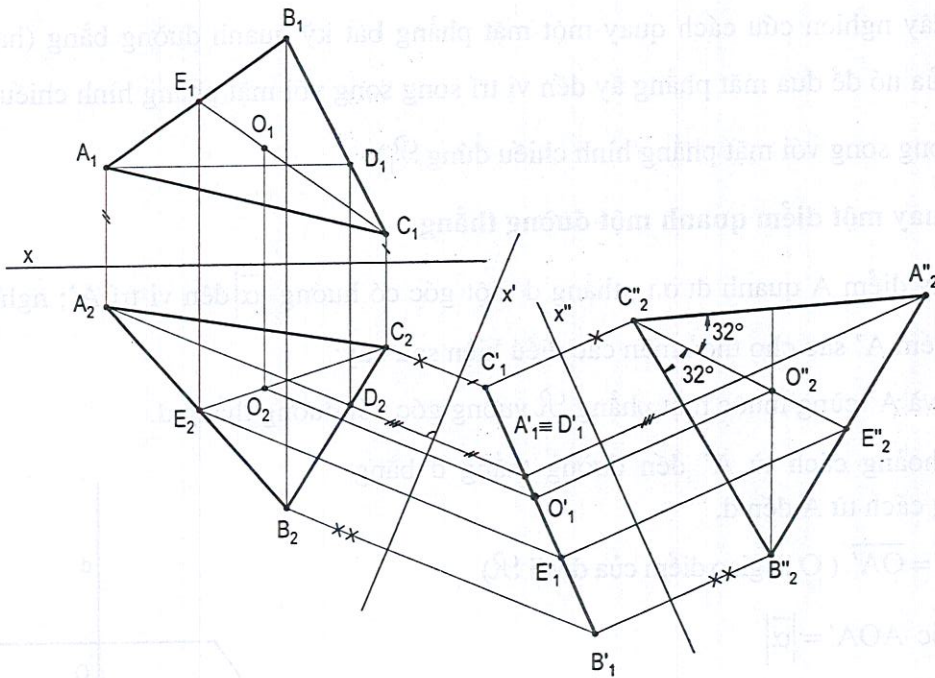
1.3. Thay liên tiếp các mặt phẳng hình chiếu

Khi thay một lần mặt phẳng hình chiếu có thể:

- Biến đường thẳng bất kỳ thành đường bằng hay đường mặt.
- Biến đường bằng (hay đường mặt) thành đường thẳng chiếu đứng (hay đường thẳng chiếu bằng). Cũng có nghĩa là có thể biến một mặt phẳng bất kỳ thành mặt phẳng chiếu đứng (hay mặt phẳng chiếu bằng).
- Biến mặt phẳng chiếu đứng (hay mặt phẳng chiếu bằng) thành mặt phẳng bằng (hay mặt phẳng mặt).

Từ đó suy ra rằng nếu thay liên tiếp hai lần các mặt phẳng hình chiếu có thể biến một đường thẳng bất kỳ thành đường thẳng chiếu hay biến một mặt phẳng bất kỳ thành mặt phẳng song song với mặt phẳng hình chiếu.

Ví dụ: Xác định tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC cho trước.



Hình 77

Hình 77 biểu diễn việc thay liên tiếp hai lần các mặt phẳng hình chiếu để đưa tam giác ABC ở vị trí bất kỳ thành vị trí mặt phẳng bằng ở hệ thống cuối cùng để vẽ được tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC.

Trước tiên chọn trục x' vuông góc với hình chiếu bằng A_2D_2 của đường bằng $AD \in ABC$ để (ABC) trở thành mặt phẳng chiếu đứng (thay mặt phẳng hình chiếu đứng) trong hệ thống thứ hai. Sau đó, thay mặt phẳng hình chiếu bằng ở hệ thống thứ hai để (ABC) là mặt phẳng bằng ở hệ thống thứ ba.

Chọn $x'' // A_1'B_1'C_1'$ và đo độ xa các điểm ở hệ thống thứ hai để vẽ hình chiếu bằng mới là $A_2''B_2''C_2''$.

Vẽ O_2'' là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác $A_2''B_2''C_2''$ chính là hình chiếu bằng mới của tâm vòng tròn nội tiếp ABC.

Từ $O_2'' \rightarrow O_2' \rightarrow O_2 \rightarrow O_1$.

Trên hình 77 điểm O được gắn vào đường phân giác CE.

§2. QUAY MỘT HÌNH PHẪNG QUANH ĐƯỜNG BẰNG HAY ĐƯỜNG MẶT CỦA NÓ

Những bài toán về lượng trong mặt phẳng được giải quyết dễ dàng khi mặt phẳng đó song song với mặt phẳng hình chiếu.

Ở đây nghiên cứu cách quay một mặt phẳng bất kỳ quanh đường bằng (hay đường mặt) của nó để đưa mặt phẳng ấy đến vị trí song song với mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}_2$ (hay song song với mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathcal{P}_1$).

2.1. Quay một điểm quanh một đường thẳng

Quay điểm A quanh đường thẳng d một góc có hướng $|\alpha|$ đến vị trí A'; nghĩa là xác định điểm A' sao cho thoả mãn các điều kiện sau đây:

- A và A' cùng thuộc mặt phẳng $\mathcal{R}$ vuông góc với đường thẳng d.
- Khoảng cách từ A' đến đường thẳng d bằng khoảng cách từ A đến d.

$$\overline{OA} = \overline{OA'} \quad (O \text{ là giao điểm của } d \text{ với } \mathcal{R})$$

$$\text{Góc } AOA' = |\alpha|$$

Đường thẳng d gọi là trục quay.

$O = d \cap \mathcal{R}$: gọi là tâm quay của điểm A

$\overline{OA}$: gọi là bán kính quay của A

A' : là ảnh của điểm A, còn A gọi là tạo ảnh.

Nhận xét:

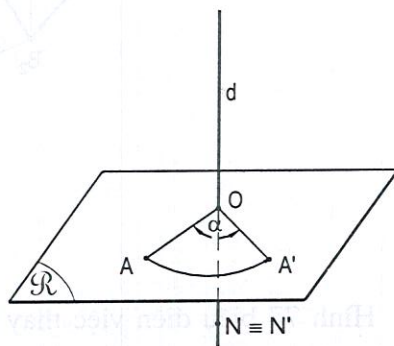
- Mọi điểm thuộc trục quay có ảnh trùng với chính nó.
- Để quay một đường thẳng quanh đường thẳng d phải quay hai điểm của đường thẳng.
- Để quay một mặt phẳng quanh đường thẳng d phải quay ba điểm của mặt phẳng.

Như vậy, khi quay một mặt phẳng quanh một đường thẳng thuộc mặt phẳng đó, chỉ cần thực hiện việc quay một điểm của mặt phẳng không thuộc trục quay.

2.2. Quay một hình phẳng quanh đường bằng của nó

Bài toán: Cho tam giác ABC, ở đó BC là đường bằng. Hãy quay mặt phẳng (ABC) quanh đường bằng BC đến vị trí (A'B'C') song song với mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}_2$.

Vì BC là trục quay nên $B' \equiv B$ và $C' \equiv C$.



Hình 78

Thực hiện phép quay điểm A đến vị trí A' sao cho $(A'B'C') // \mathcal{P}_2$.

A' và A cùng thuộc mặt phẳng chiếu bằng $\mathcal{R}$ vuông góc với BC.

Trên hình 79 vẽ qua A₂ đường thẳng $\mathcal{R}_2 \perp B_2C_2$ thì A'₂ ∈ $\mathcal{R}_2$

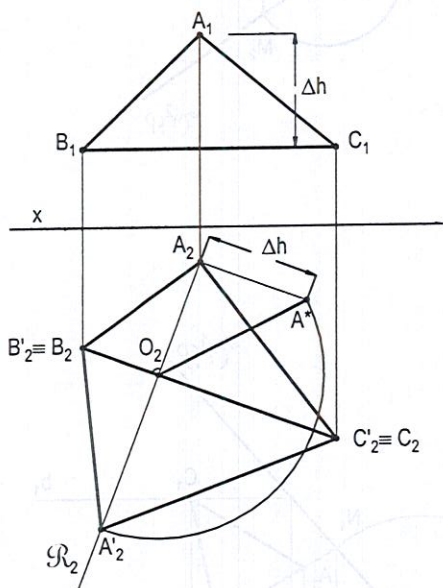
Gọi O là tâm quay của A thì $\overline{O_2A'_2}$ bằng độ lớn thật của $|\overline{OA'}| = |\overline{OA}|$

Xác định chiều dài $|\overline{OA}|$ là $\overline{O_2A^*}$ (hình 79)

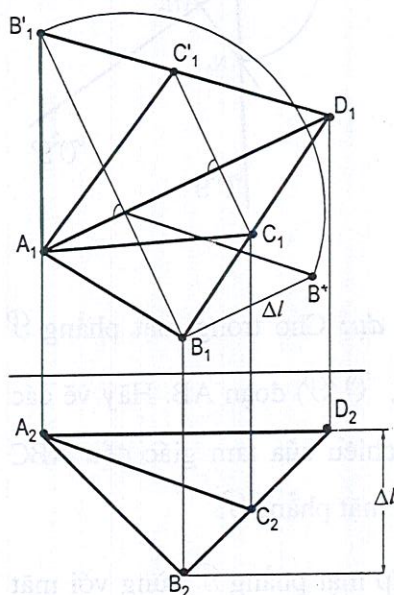
Vậy A'₂ ∈ $\mathcal{R}_2$ sao cho $\overline{O_2A'_2} = \overline{O_2A^*}$.

Tam giác A'₂B'₂C'₂ bằng độ lớn thật của nó.

Hoàn toàn tương tự như trên cũng có thể thực hiện việc quay một mặt phẳng quanh đường mặt của nó đến vị trí song song với mặt phẳng hình chiếu đứng.



Hình 79



Hình 80

Hình 80 biểu diễn việc quay mặt phẳng (ABC) quanh đường mặt AD đến vị trí $(A'B'C') // \mathcal{P}_1$.

Vẽ đường mặt AD, sau đó quay điểm B đến vị trí B' (hình 80).

Vì C ∈ BD → C' ∈ B'D'.

Tam giác A'B'C' bằng độ lớn thật của tam giác ABC.

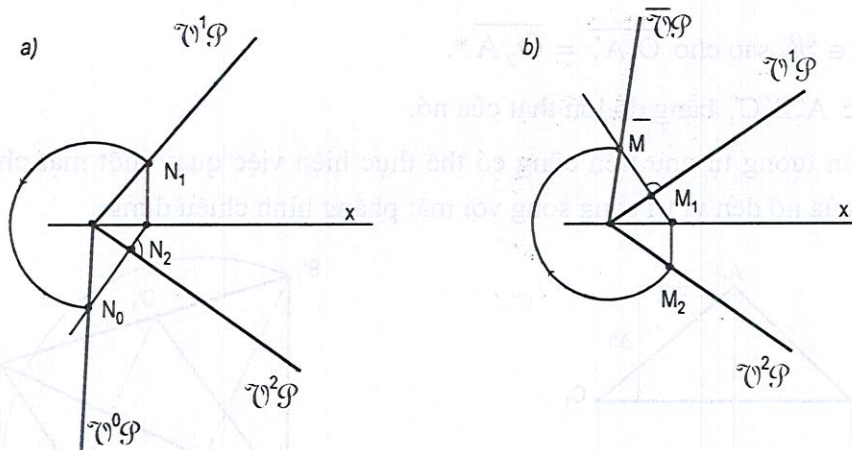
2.3. Gập mặt phẳng trùng với mặt phẳng hình chiếu

Thực hiện phép quay quanh đường bằng hay đường mặt như trên mà trục quay là vết bằng hay vết đứng của mặt phẳng để vị trí mới của mặt phẳng trùng với mặt phẳng hình

chiếu bằng hay mặt phẳng hình chiếu đứng - ta nói *gập mặt phẳng trùng với mặt phẳng hình chiếu*.

Hình 81a biểu diễn hình gập của mặt phẳng $\mathcal{P}$ trùng với $\mathcal{P}_2$, ở đó N_0 và $\tau^0\mathcal{P}$ lần lượt là hình gập của N và $\tau^1\mathcal{P}$ vào $\mathcal{P}_2$.

Hình 81b biểu diễn hình gập của mặt phẳng $\mathcal{P}$ trùng với $\mathcal{P}_1$.

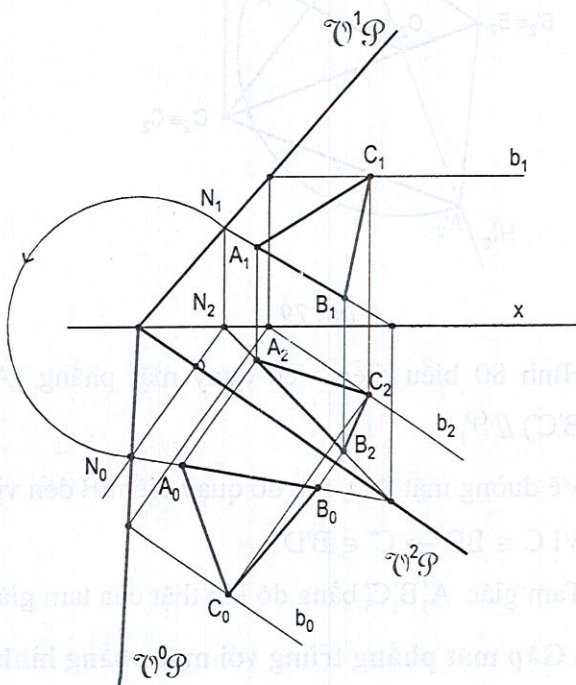


Hình 81

Ví dụ: Cho trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ ($\tau^1\mathcal{P}$, $\tau^2\mathcal{P}$) đoạn AB. Hãy vẽ các hình chiếu của tam giác đều ABC thuộc mặt phẳng $\mathcal{P}$.

Gập mặt phẳng $\mathcal{P}$ trùng với mặt phẳng hình chiếu bằng, vẽ hình gập của AB là A_0B_0 , (hình 82).

Vẽ tam giác đều $A_0B_0C_0$ là độ lớn thật của ABC. Từ C_0 suy ra C_2 , C_1 bằng cách gắn điểm C vào một đường thẳng của mặt phẳng $\mathcal{P}$.



Hình 82

Chương 4

ĐA DIỆN

§1. BIỂU DIỄN ĐA DIỆN

1.1. Khái niệm đa diện

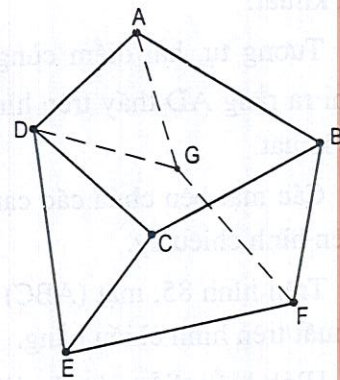
Đa diện là một mặt kín được tạo thành từ các đa giác phẳng gắn liền với nhau bởi các cạnh của chúng, (hình 83)

Các đa giác phẳng tạo nên đa diện gọi là các mặt của đa diện - Các đỉnh và các cạnh của các đa giác đó cũng được gọi là các đỉnh và các cạnh của đa diện.

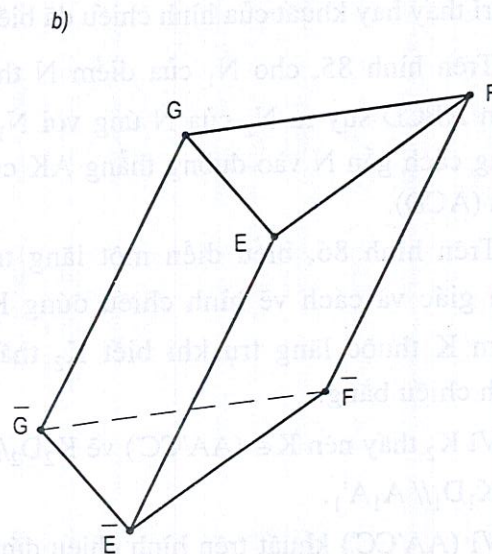
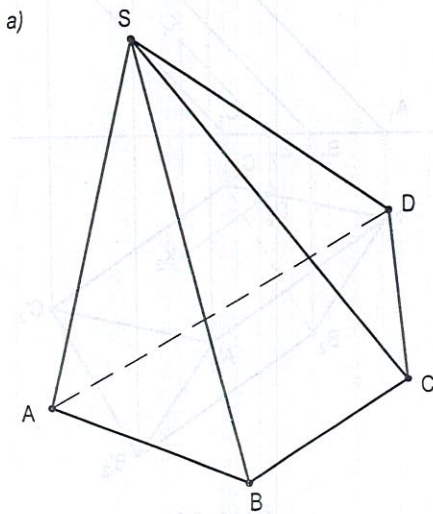
Hình 83, là một đa diện 6 mặt (gồm 4 tứ giác phẳng và 2 tam giác).

Các đa diện thường gặp trong kỹ thuật, là mặt chóp (mặt tháp) và mặt lăng trụ.

Hình 84, vẽ hình không gian của mặt chóp đáy tứ giác và mặt lăng trụ đáy tam giác.



Hình 83



Hình 84

1.2. Biểu diễn đa diện

Để biểu diễn đa diện người ta thường biểu diễn các cạnh của đa diện đó. Từ các cạnh ấy có các đỉnh và các mặt của đa diện. Trên mỗi hình chiếu cần nhận biết rõ các mặt bên thấy, các mặt bên khuất của đa diện.

Hình 85, biểu diễn tứ diện $ABCD$ có $A_1B_1C_1D_1$ và $A_2B_2D_2C_2$ là đường bao quanh hình chiếu đứng và đường bao quanh hình chiếu bằng của tứ diện.

Nhờ hai điểm cùng tia chiếu đứng E và F ta biết cạnh BD thấy trên hình chiếu đứng, còn A_1C_1 là khuất.

Tương tự, hai điểm cùng tia chiếu bằng P và Q chỉ ra rằng AD thấy trên hình chiếu bằng, còn B_2C_2 là khuất.

Các mặt bên chứa các cạnh khuất trên hình chiếu nào đó cho biết các mặt bên khuất trên hình chiếu ấy.

Trên hình 85, mặt (ABC) và (ACD) khuất trên hình chiếu đứng, mặt (ABC) và (BCD) khuất trên hình chiếu bằng.

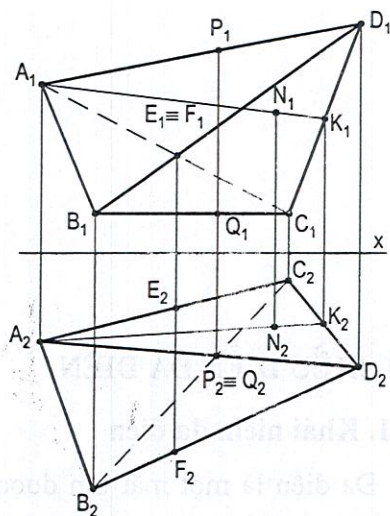
Hình biểu diễn của đa diện đã được xác định thì biết 1 hình chiếu của điểm thuộc đa diện dễ dàng tìm được hình chiếu còn lại của nó ứng với vị trí thấy hay khuất của hình chiếu đã biết.

Trên hình 85, cho N_1 của điểm N thuộc tứ diện $ABCD$ suy ra N_2 của N ứng với N_1 khuất bằng cách gắn N vào đường thẳng AK của mặt bên (ACD) .

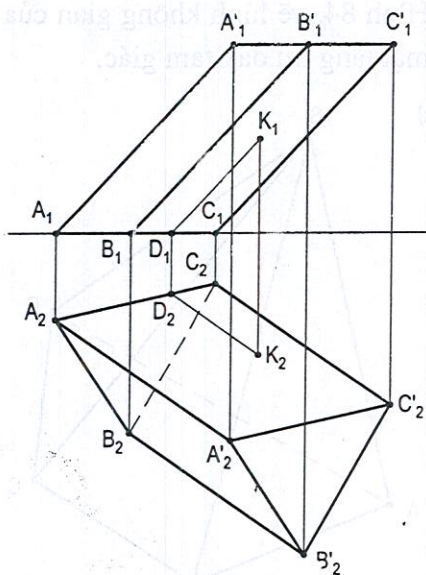
Trên hình 86, biểu diễn một lăng trụ đáy tam giác và cách vẽ hình chiếu đứng K_1 của điểm K thuộc lăng trụ khi biết K_2 thấy trên hình chiếu bằng.

Vì K_2 thấy nên $K \in (AA'CC')$ vẽ $K_2D_2 // A_2A'_2$
 $\rightarrow K_1D_1 // A_1A'_1$.

Vì $(AA'CC')$ khuất trên hình chiếu đứng nên K_1 là khuất.



Hình 85



Hình 86

§2. GIAO TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG VỚI ĐA DIỆN

Giao tuyến của mặt phẳng với đa diện là đa giác phẳng.

Mỗi đỉnh của đa giác giao tuyến là giao điểm của một cạnh đa diện với mặt phẳng.

Mỗi cạnh của đa giác giao tuyến là giao tuyến của mặt phẳng với một mặt bên của đa diện.

$$E = AB \cap \mathcal{P}$$

$$GH = (ACD) \cap \mathcal{P}$$

Hình 87, vẽ mặt phẳng $\mathcal{P}$ cắt tứ diện (ABCD). Theo tứ giác EFGH.

Do vậy, để vẽ giao tuyến của mặt phẳng với đa diện có thể xác định các cạnh của đa giác giao tuyến hoặc xác định các đỉnh của đa giác đó - thông thường kết hợp cả hai cách nói trên.

Việc vẽ giao tuyến hai mặt phẳng hay vẽ giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng đã trình bày ở chương II. Xét một số ví dụ cụ thể.

Ví dụ 1: Vẽ giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{P}$ ($\gamma^1\mathcal{P}$, $\gamma^2\mathcal{P}$) với lăng trụ thẳng đứng (abc), (hình 88).

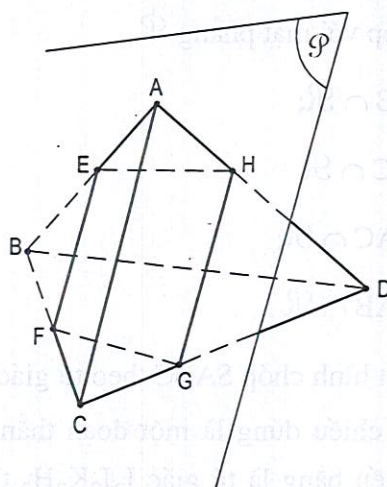
Vì các cạnh bên của lăng trụ là đường thẳng chiếu bằng nên các giao điểm của chúng với mặt phẳng $\mathcal{P}$ có hình chiếu bằng trùng với hình chiếu bằng của a, b, c.

$$I = a \cap \mathcal{P} \text{ có } I_2 \equiv a_2;$$

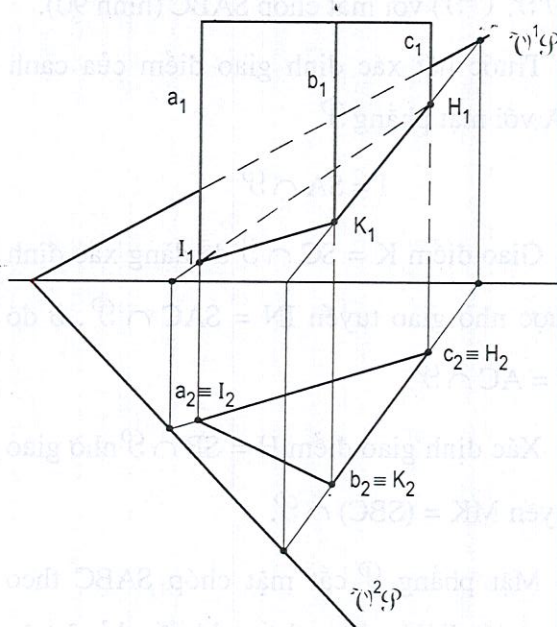
$$K = b \cap \mathcal{P} \text{ có } K_2 \equiv b_2;$$

$$H = c \cap \mathcal{P} \text{ có } H_2 \equiv c_2$$

Từ đó dễ dàng suy ra I_1, K_1, H_1



Hình 87



Hình 88

Ví dụ 2: Vẽ giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$ với mặt chóp SABC (hình 89).

Vì $\mathcal{R}$ là mặt phẳng chiếu đứng nên dễ dàng vẽ được các giao điểm của các cạnh hình chóp với mặt phẳng $\mathcal{R}$.

$$I = SB \cap \mathcal{R};$$

$$J = SC \cap \mathcal{R}$$

$$K = AC \cap \mathcal{R};$$

$$H = AB \cap \mathcal{R}$$

$\mathcal{R}$ cắt hình chóp SABC theo tứ giác IJKH có hình chiếu đứng là một đoạn thẳng, còn hình chiếu bằng là tứ giác $I_2J_2K_2H_2$ thấy rõ trên hình 89.

Ví dụ 3: Vẽ giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{P}$ ($\mathcal{V}^1\mathcal{P}, \mathcal{V}^2\mathcal{P}$) với mặt chóp SABC (hình 90).

Trước hết xác định giao điểm của cạnh SA với mặt phẳng $\mathcal{P}$

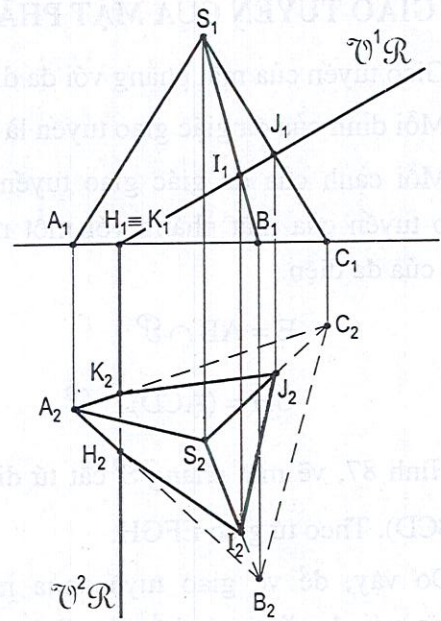
$$I = SA \cap \mathcal{P}$$

Giao điểm $K = SC \cap \mathcal{P}$ dễ dàng xác định được nhờ giao tuyến $IN = SAC \cap \mathcal{P}$, ở đó $N = AC \cap \mathcal{P}$.

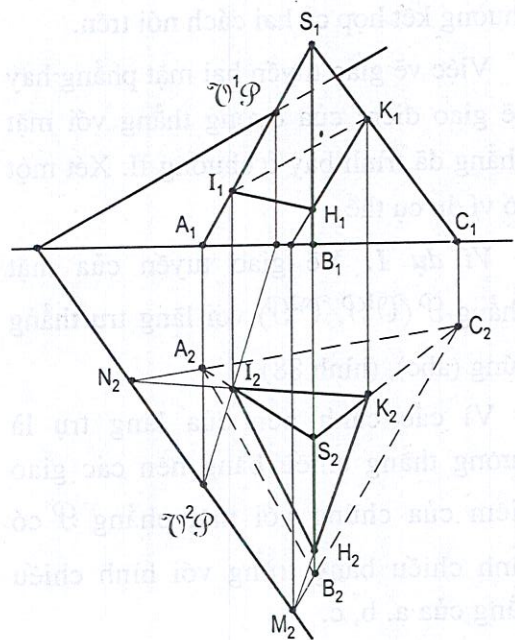
Xác định giao điểm $H = SB \cap \mathcal{P}$ nhờ giao tuyến $MK = (SBC) \cap \mathcal{P}$.

Mặt phẳng $\mathcal{P}$ cắt mặt chóp SABC theo tam giác IKH với sự thấy - khuất chỉ rõ trên hình 90.

Chú ý: Bài toán cũng có thể giải dễ dàng bằng cách thay mặt phẳng hình chiếu đứng để trong hệ thống mới mặt phẳng $\mathcal{P}$ là mặt phẳng chiếu đứng.



Hình 89



Hình 90

§3. GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐA DIỆN

Giao điểm của đường thẳng với đa diện là các điểm vừa thuộc đường thẳng, vừa thuộc mặt đa diện. Để xác định các giao điểm của một đường thẳng với một đa diện người ta thường dùng phương pháp mặt phẳng phụ trợ, nội dung như sau:

- Qua đường thẳng đã cho dựng một mặt phẳng phụ trợ - thường chọn là mặt phẳng chiếu.

- Vẽ giao tuyến phụ của mặt phẳng phụ trợ với đa diện.

- Xác định các giao điểm của giao tuyến phụ vừa vẽ với đường thẳng đã cho. Đó là các giao điểm của đường thẳng với đa diện.

Trên hình 91 trình bày cách xác định các giao điểm của đường thẳng d với hình chóp $SABC$, mặt phẳng phụ trợ R đi qua d cắt mặt chóp $SABC$ theo giao tuyến EFG .

Hai giao điểm I và K của đường thẳng d với giao phụ EFG là các giao điểm của đường thẳng d với mặt chóp $SABC$.

Ví dụ 1: Xác định các giao điểm của đường thẳng d và mặt chóp $SABC$ - hình 92.

- Qua d dựng mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng R
 $\rightarrow R_1 \equiv d_1$.

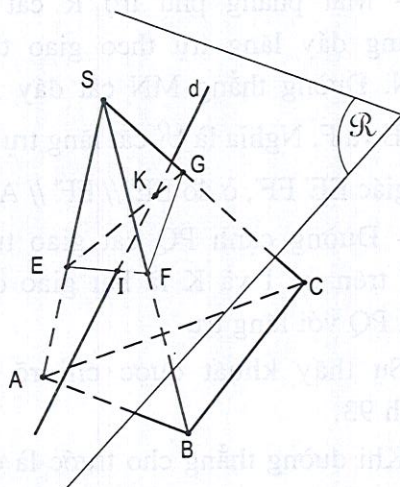
- Vẽ giao tuyến của mặt phẳng phụ trợ R với mặt chóp $SABC$. Giao phụ là tam giác EFG .

- Xác định các giao điểm I và K của đường thẳng d với giao phụ EFG .

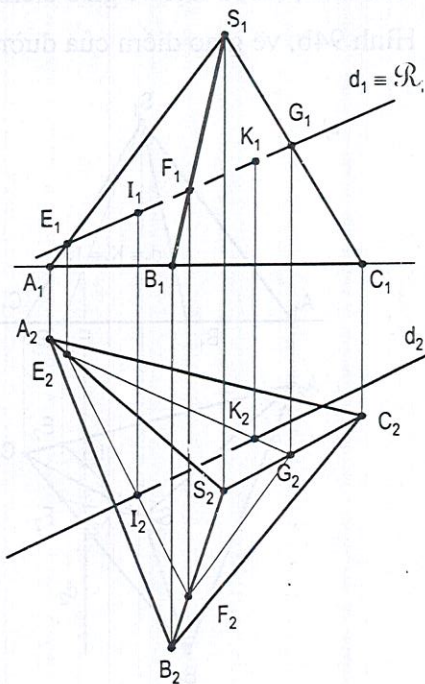
I và K là các giao điểm của d với mặt chóp $SABC$.

Trên hình 92 cũng chỉ rõ sự thấy khuất của các giao điểm và các hình chiếu của đường thẳng so với hình chóp $SABC$.

Trường hợp đường thẳng cho trước là đường cạnh và đa diện là mặt chóp hay mặt lăng trụ thì nên chọn mặt phẳng phụ trợ chứa đường cạnh và đi qua đỉnh chóp hay song song với cạnh bên của lăng trụ.



Hình 91



Hình 92

Ví dụ 2:

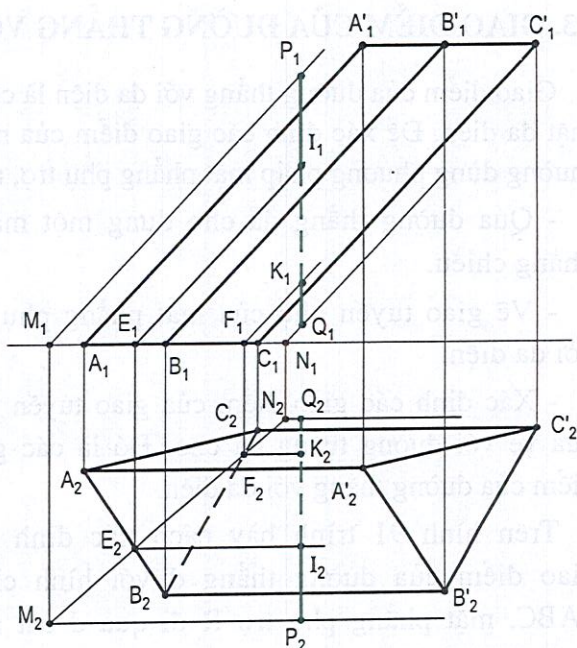
Xác định các giao điểm của đường cạnh PQ với lăng trụ (AA', BB', CC') - hình 93.

- Qua PQ dựng mặt phẳng phụ trợ $\mathcal{R} // AA'$.

- Mặt phẳng phụ trợ $\mathcal{R}$ cắt mặt phẳng đáy lăng trụ theo giao tuyến MN. Đường thẳng MN cắt đáy ABC tại E và F. Nghĩa là $\mathcal{R}$ cắt lăng trụ theo tứ giác $EE'FF'$, ở đó $EE' // FF' // AA'$.

- Đường cạnh PQ cắt giao tuyến nói trên tại I và K là hai giao điểm của PQ với lăng trụ.

Sự thấy khuất được chỉ rõ trên hình 93.

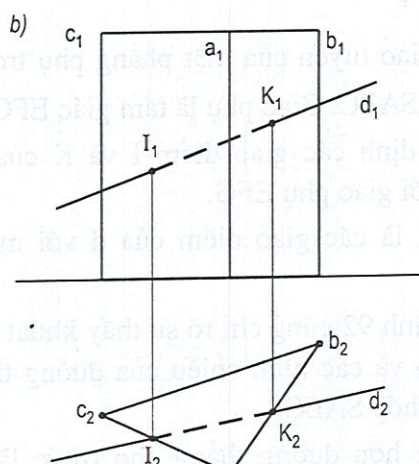
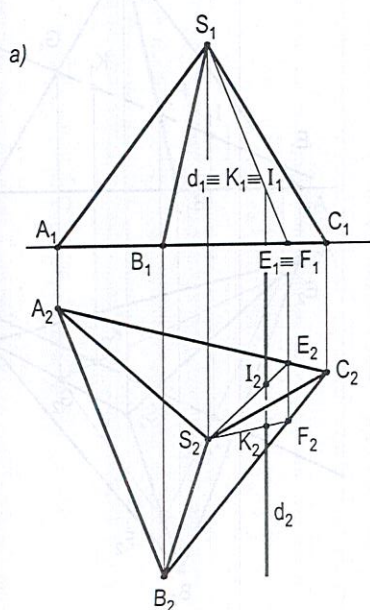


Hình 93

Khi đường thẳng cho trước là đường thẳng chiếu hay đa diện cho trước là lăng trụ chiếu (có các cạnh bên của lăng trụ là đường thẳng chiếu) thì việc xác định giao điểm của đường thẳng với đa diện đơn giản hơn.

Hình 94a, chỉ ra việc vẽ giao điểm của đường thẳng chiếu đứng d với hình chóp SABC.

Hình 94b, vẽ giao điểm của đường thẳng d với lăng trụ chiếu bằng.



Hình 94

§4. GIAO TUYẾN HAI ĐA DIỆN

Các đa diện đưa ra trong tài liệu này là các đa diện lồi. Do vậy, giao tuyến của hai đa diện là một hoặc hai đường gãy khúc khép kín. Đỉnh và cạnh của đường gãy khúc đó gọi là đỉnh và cạnh của giao tuyến.

Mỗi đỉnh của giao tuyến là một giao điểm của một cạnh đa diện này với đa diện kia. Như hình 95.

$$E = p \cap SAB$$

$$I = SB \cap (p // r) \dots$$

Mỗi cạnh của giao tuyến là giao tuyến của hai mặt bên nào đó của hai đa diện.

$$EK = (p // q) \cap SAB$$

$$JH = (r // q) \cap SBC \dots$$

Vậy để vẽ giao tuyến hai đa diện phải vẽ các đỉnh và các cạnh của giao. Nghĩa là xác định các giao điểm của các cạnh đa diện này với đa diện kia và ngược lại hoặc vẽ các giao tuyến của từng mặt bên đa diện này với đa diện còn lại.

Khi đã xác định được các đỉnh của giao tuyến cần chú ý.

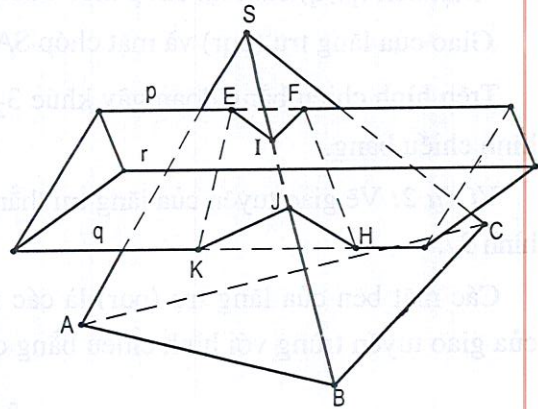
- Chỉ được nối hai đỉnh của giao làm một cạnh khi hai đỉnh ấy cùng thuộc hai mặt bên nào đó của hai đa diện.

- Một cạnh của giao chỉ thấy trên hình chiếu nào đó khi nó thuộc cả hai mặt bên thấy (của hai đa diện) trên hình chiếu ấy.

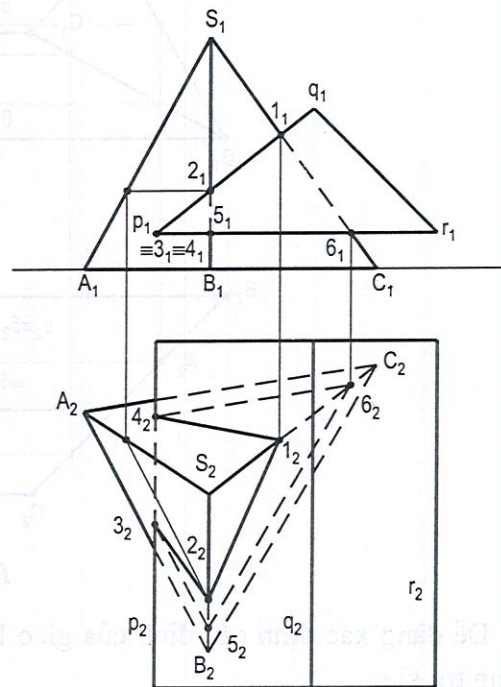
Dưới đây, xét một số ví dụ về giao hai đa diện trong trường hợp đã biết một hình chiếu của giao, (đa diện có vị trí đặc biệt).

Ví dụ 1: Vẽ giao tuyến của mặt chóp $SABC$ và lăng trụ chiếu đứng $(p//q//r)$, hình 96.

Các mặt bên của lăng trụ (pqr) là các mặt phẳng chiếu đứng, nên hình chiếu đứng của giao trùng với hình chiếu đứng của lăng trụ. Để dàng xác định được các đỉnh của giao.



Hình 95



Hình 96

- Mặt bên $(p//r) // P_2$ cắt mặt chóp SABC theo đường gãy khúc 3564.

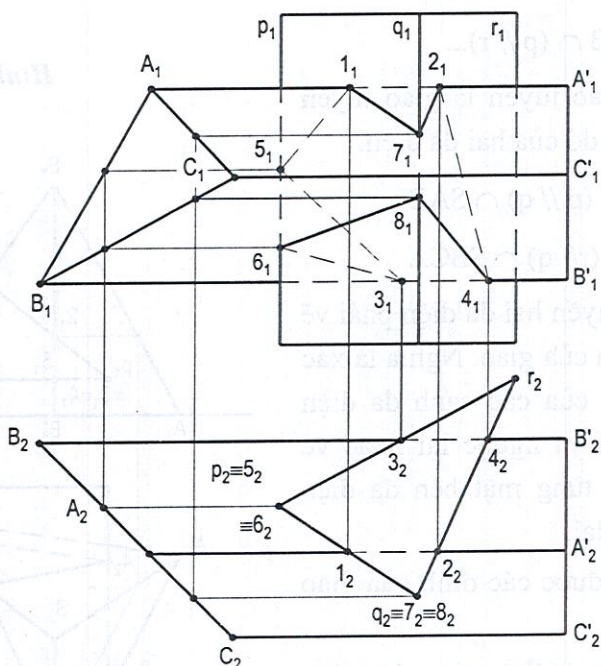
- Mặt bên $(p//q)$ cắt mặt chóp theo đường 3214.

Giao của lăng trụ (pqr) và mặt chóp SABC là đường gãy khúc khép kín 1235641.

Trên hình chiếu bằng đoạn gãy khúc $3_2 5_2 6_2 4_2$ bị khuất vì mặt bên $(p // r)$ khuất trên hình chiếu bằng.

Ví dụ 2: Vẽ giao tuyến của lăng trụ thẳng đứng (pqr) với lăng trụ ngang $(AA' BB' CC')$ - hình 97.

Các mặt bên của lăng trụ (pqr) là các mặt phẳng chiếu bằng, do đó hình chiếu bằng của giao tuyến trùng với hình chiếu bằng của lăng trụ (pqr) .



Hình 97

Dễ dàng xác định các đỉnh của giao là các giao điểm của các cạnh lăng trụ này với lăng trụ kia:

$$1 = AA' \cap (p // q)$$

$$5 = p \cap (AA' BB')$$

$$2 = AA' \cap (q // r)$$

$$6 = p \cap (BB' CC')$$

$$3 = BB' \cap (p // r)$$

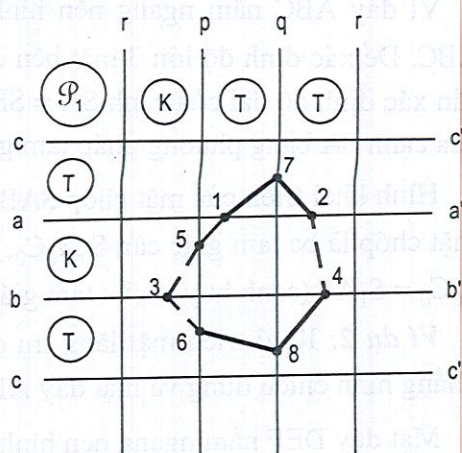
$$7 = q \cap (AA' CC')$$

$$4 = BB' \cap (q // r)$$

$$8 = q \cap (BB' CC')$$

Các giao điểm 5, 6, 7, 8 của các cạnh lăng trụ đứng với lăng trụ ngang được xác định nhờ các đường thẳng vẽ qua các điểm đó và song song với cạnh CC' .

Để nối các đỉnh của giao trên hình chiếu đứng và xét thấy khuất, có thể dùng sơ đồ khai triển của hai lăng trụ bằng cách tưởng tượng cắt lăng trụ dọc theo 1 cạnh bên nào đó rồi trải cả hai lăng trụ lên một mặt phẳng ta có sơ đồ khai triển như hình 98. Ghi các giao điểm đã xác định lên sơ đồ theo đúng cạnh và mặt bên tương ứng. Sau đó nối các điểm đó theo qui tắc là chỉ được nối hai điểm cùng nằm trên một mặt lưới của sơ đồ. Giao tuyến là đường gãy khúc 172486351.



Hình 98

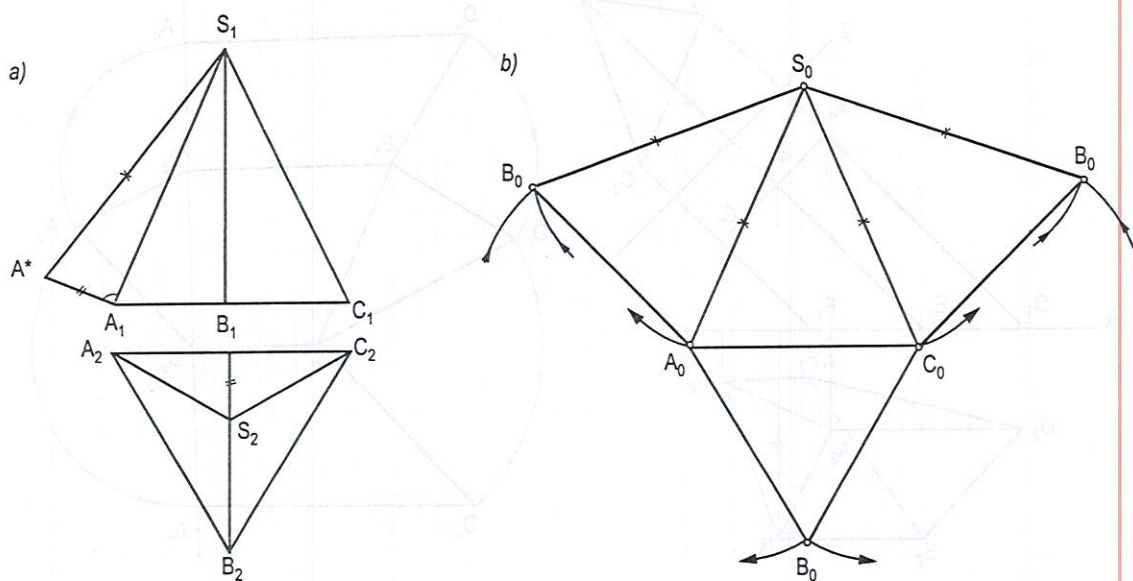
Đánh dấu thấy, khuất cho các mặt bên ở hình chiếu đang xét lên sơ đồ - dễ dàng vẽ được các cạnh thấy, khuất trên hình biểu diễn của hình chiếu tương ứng.

§5. KHAI TRIỂN ĐA DIỆN

Khai triển một đa diện là trải các mặt của đa diện đó lên cùng một mặt phẳng. Trên hình khai triển, các mặt của đa diện sẽ thể hiện độ lớn của chúng. Như vậy việc vẽ hình khai triển của đa diện quy về việc xác định độ lớn của các đa giác phẳng là các mặt của đa diện đó.

Vấn đề khai triển đa diện nói riêng và khai triển các mặt nói chung có ý nghĩa thực tiễn khi cần chế tạo các mặt từ các tấm phẳng (kim loại, bìa, phoóc mi ca....)

Ví dụ 1: Khai triển mặt chóp đều SABC (hình 99).



Hình 99

Vì đáy ABC nằm ngang nên hình chiếu bằng $A_2B_2C_2$ cho ta độ lớn của tam giác ABC. Để xác định độ lớn 3 mặt bên của mặt chóp là các tam giác cân bằng nhau, ta chỉ cần xác định độ dài của cạnh $SA = SB = SC$. Trên hình vẽ đã chỉ rõ cách xác định độ dài của cạnh SA bằng phương pháp tam giác vuông.

Hình khai triển của mặt chóp SABC gồm mặt đáy $A_0B_0C_0 = A_2B_2C_2$ và 3 mặt bên của mặt chóp là ba tam giác cân $S_0A_0C_0$, $S_0C_0B_0$ và $S_0A_0B_0$ trong đó các cạnh $S_0A_0 = S_0B_0 = S_0C_0 = S_1A^*$ (cạnh huyền của tam giác vuông $S_1A_1A^*$).

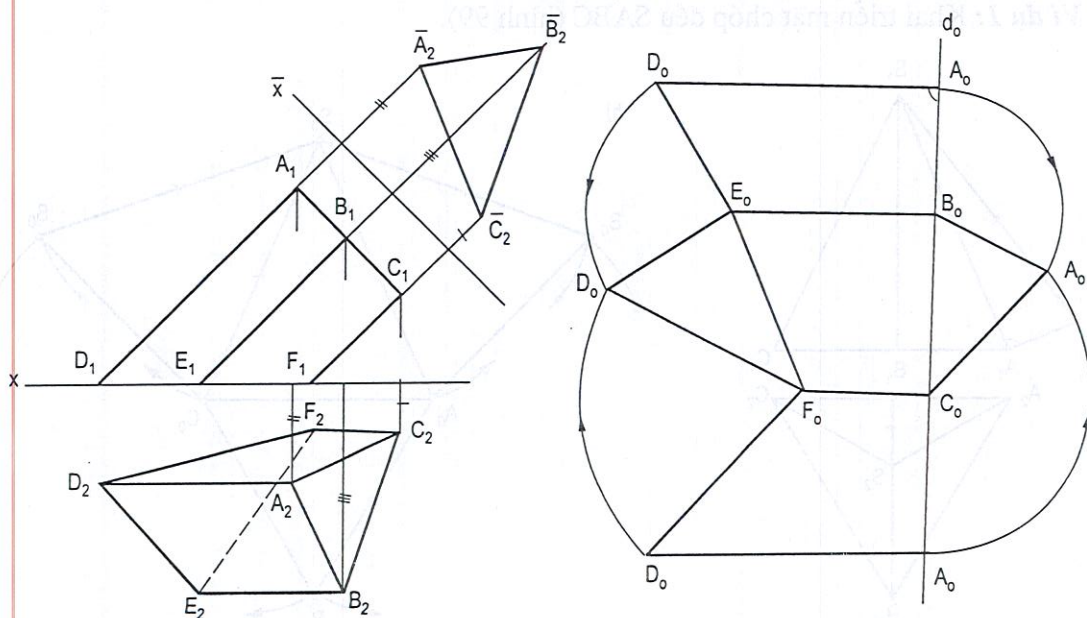
Ví dụ 2: Khai triển mặt lăng trụ cụt ABC. DEF có các cạnh bên song song với mặt phẳng hình chiếu đứng và mặt đáy ABC vuông góc với các cạnh bên (hình 100).

Mặt đáy DEF nằm ngang nên hình chiếu bằng $D_2E_2F_2$ thể hiện độ lớn mặt đáy đó.

Độ lớn của mặt đáy ABC được xác định bằng cách thay mặt phẳng hình chiếu bằng với trục $x' // A_1B_1C_1$. Hình chiếu bằng mới $\bar{A}_2, \bar{B}_2, \bar{C}_2$ cho ta độ lớn của ABC.

Các cạnh AD, BE, CF của lăng trụ là các đường mặt nên hình chiếu đứng của chúng cho ta độ dài của các cạnh đó.

Vẽ hình khai triển của mặt lăng trụ như sau: Trên đường thẳng d_0 vẽ tùy ý, đặt lần lượt các đoạn $A_0B_0 = \bar{A}_2\bar{B}_2$; $B_0C_0 = \bar{B}_2\bar{C}_2$ và $C_0A_0 = \bar{C}_2\bar{A}_2$. Qua các điểm A_0, B_0 và C_0 kẻ các đường thẳng vuông góc với d_0 và lần lượt đặt trên đó các đoạn $A_0D_0 = A_1D_1$; $B_0E_0 = B_1E_1$ và $C_0F_0 = C_1F_1$. Nối các điểm D_0, E_0, F_0 bằng các đoạn thẳng và sau cùng dựng hai tam giác đáy của lăng trụ là $A_0B_0C_0$ và $D_0E_0F_0$ theo các cạnh của chúng.



Hình 100

Chương 5

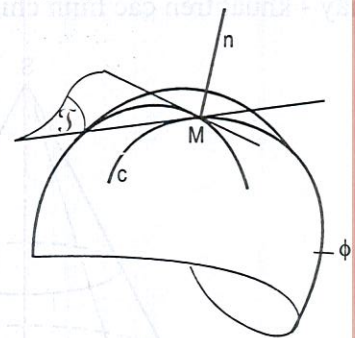
MẶT CONG

§1. BIỂU DIỄN MẶT CONG

1.1. Các khái niệm

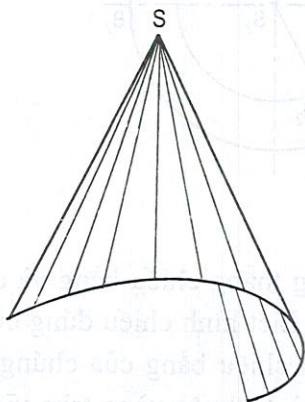
Mặt cong là quỹ tích các vị trí của một đường chuyển động theo một quy luật nhất định nào đó. Đường chuyển động này được gọi là *đường sinh*.

Giả sử có mặt cong ϕ và một điểm M thuộc mặt cong đó (hình 101). Qua điểm M có vô số các đường cong của ϕ (đường cong c chẳng hạn). Tiếp tuyến của đường cong c tại điểm M được gọi là tiếp tuyến của mặt cong ϕ tại điểm đó. Nếu các tiếp tuyến của mặt cong ϕ tại M cùng thuộc mặt phẳng ζ thì mặt phẳng ζ được gọi là *mặt phẳng tiếp xúc* của mặt cong ϕ tại điểm M . Đường thẳng n vuông góc với ζ và đi qua điểm M được gọi là *pháp tuyến* của mặt cong ϕ tại M .

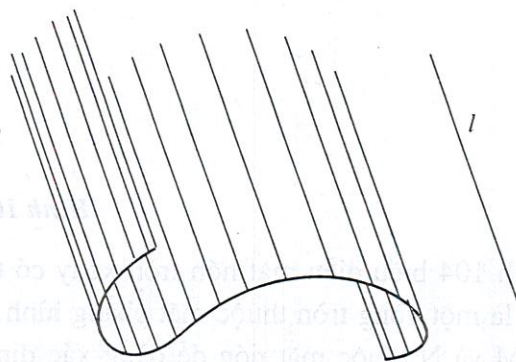


Hình 101

- *Mặt kẻ* là các mặt cong được tạo thành bởi các đường sinh là đường thẳng. Có các mặt kẻ khả triển (có thể khai triển trên mặt phẳng) và các mặt kẻ không khả triển.



Hình 102



Hình 103

+ Mặt nón (hình 102) là quỹ tích các vị trí của một đường thẳng chuyển động luôn đi qua một điểm cố định (gọi là đỉnh nón) và tựa lên một đường cong cố định gọi là đường chuẩn.

+ Mặt trụ (hình 103) là quỹ tích các vị trí của một đường thẳng chuyển động luôn song song với một phương cố định và tựa lên một đường cong cố định.

Mặt nón và mặt trụ là các mặt kẻ khả triển.

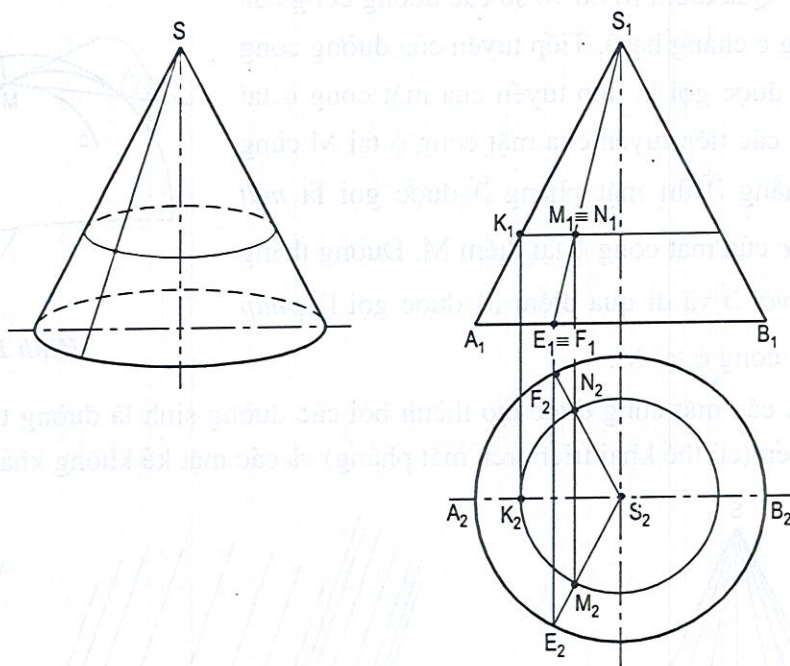
- Mặt tròn xoay là mặt cong được tạo thành bởi một đường quay xung quanh một đường thẳng cố định (gọi là trục xoay).

Các mặt phẳng vuông góc với trục xoay cắt mặt tròn xoay theo các đường tròn gọi là các *vĩ tuyến*.

Các mặt phẳng đi qua trục xoay cắt mặt tròn xoay theo các đường gọi là các *kinh tuyến*.

1.2. Biểu diễn mặt cong

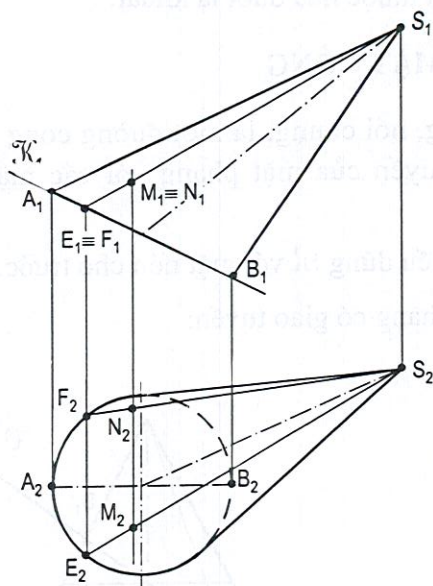
Để biểu diễn một mặt cong, người ta biểu diễn các yếu tố hình học xác định mặt cong đó; đồng thời vẽ đường bao quanh các hình chiếu của mặt cong và chỉ rõ nhận biết sự thấy - khuất trên các hình chiếu.



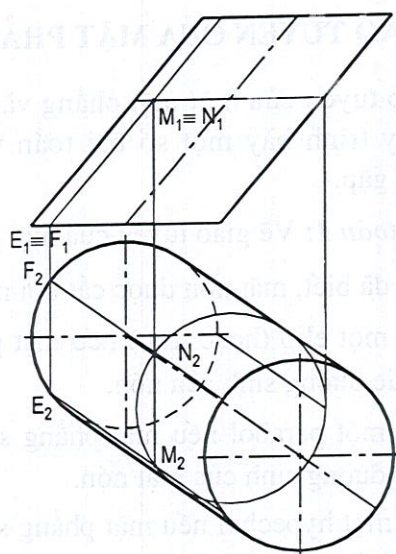
Hình 104

Hình 104 biểu diễn mặt nón tròn xoay có trục là đường thẳng chiếu bằng và đường chuẩn là một vòng tròn thuộc mặt phẳng hình chiếu bằng. Biết hình chiếu đứng của hai điểm M và N thuộc mặt nón để dàng xác định được hình chiếu bằng của chúng bằng cách gắn M và N vào các đường sinh SE, SF hoặc coi M và N thuộc vòng tròn vĩ tuyến đi qua hai điểm đó.

Hình 105 biểu diễn mặt nón đỉnh S và đường chuẩn là một elip thuộc mặt phẳng chiếu đứng K (có hình chiếu bằng là một vòng tròn). Trên hình vẽ chỉ rõ cách xác định hình chiếu bằng M_2, N_2 của điểm M và N khi biết hình chiếu đứng của chúng.



Hình 105



Hình 106

Hình 106 biểu diễn một mặt trụ có đường chuẩn là đường tròn thuộc mặt phẳng hình chiếu bằng.

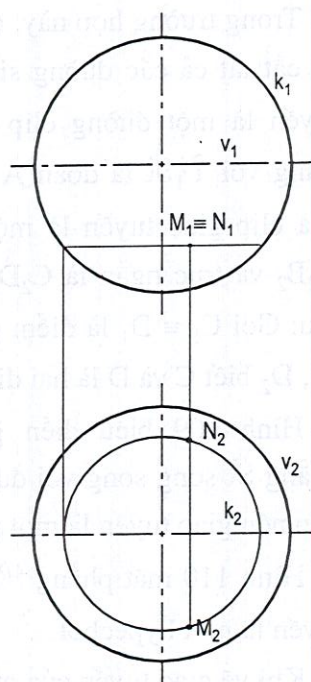
Trên hình vẽ chỉ ra việc xác định hình chiếu bằng của điểm M và N thuộc mặt trụ khi cho hình chiếu đứng của chúng.

Hình 107 biểu diễn một mặt cầu tâm O , bán kính R . Hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của nó là hai đường tròn bằng nhau có tâm lần lượt là hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của tâm cầu bán kính R .

Hình chiếu đứng của vòng tròn k bao quanh hình chiếu đứng của mặt cầu có hình chiếu bằng tương ứng là đường kính k_2 .

Hình chiếu bằng của vòng tròn v bao quanh hình chiếu bằng của mặt cầu có hình chiếu đứng tương ứng là đường kính v_1 .

Trên hình cũng chỉ rõ cách xác định hình chiếu bằng M_2 và N_2 của hai điểm M, N thuộc mặt cầu khi cho trước $M_1 \equiv N_1$ và biết M thấy, N khuất trên hình chiếu đứng.



Hình 107

Vòng tròn k chia mặt cầu thành nửa ngoài và nửa trong - các điểm thuộc nửa ngoài của mặt cầu thấy trên hình chiếu đứng, còn các điểm thuộc nửa trong là khuất.

Vòng tròn v chia mặt cầu thành nửa trên và nửa dưới - các điểm thuộc nửa trên của mặt cầu thấy trên hình chiếu bằng, còn các điểm thuộc nửa dưới là khuất.

§2. GIAO TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG VÀ MẶT CONG

Giao tuyến của một mặt phẳng và mặt cong, nói chung, là một đường cong phẳng. Sau đây trình bày một số bài toán vẽ giao tuyến của mặt phẳng với các mặt cong thường gặp.

Bài toán 1: Vẽ giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$ với mặt nón cho trước.

Như đã biết, mặt nón được cắt bởi một mặt phẳng có giao tuyến:

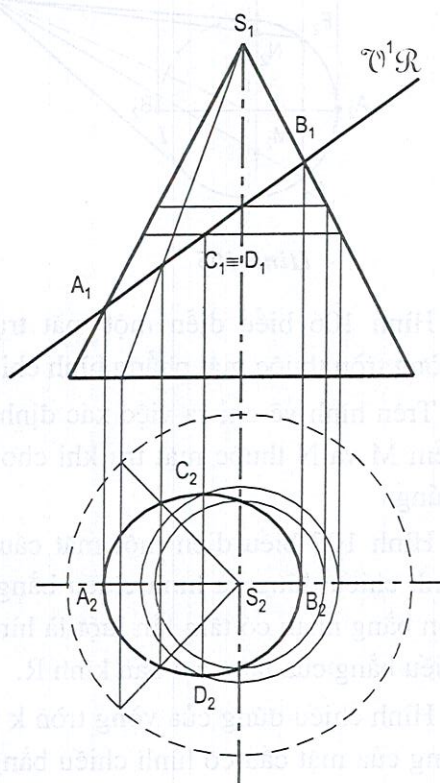
- Là một elip (hoặc tròn) nếu mặt phẳng cắt tất cả các đường sinh của nón.
- Là một parabol nếu mặt phẳng song song với một đường sinh của mặt nón.
- Là một hypecbol nếu mặt phẳng song song với hai đường sinh của mặt nón.
- Là hai đường sinh thẳng khi mặt phẳng đi qua đỉnh nón.

Trong trường hợp này, (hình 108) mặt phẳng $\mathcal{R}$ cắt tất cả các đường sinh của nón nên giao tuyến là một đường elip có hình chiếu đứng trùng với $\tilde{\gamma}_1^1 \mathcal{R}$ là đoạn A_1B_1 , hình chiếu bằng của elip giao tuyến là một elip có trục dài là A_2B_2 và trục ngắn là C_2D_2 được xác định như sau: Gọi $C_1 \equiv D_1$ là điểm giữa của A_1B_1 suy ra C_2, D_2 biết C và D là hai điểm thuộc mặt nón.

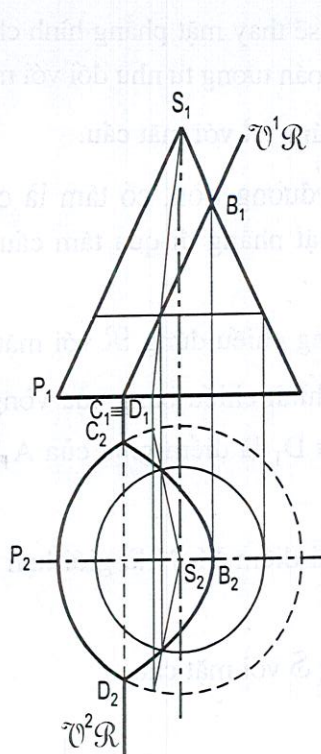
Hình 109 biểu diễn giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{R}$ song song với đường sinh SP của mặt nón nên giao tuyến là một parabol.

Hình 110 mặt phẳng $\mathcal{R}$ song song với hai đường sinh SE, SF của mặt nón nên giao tuyến là một hypecbol.

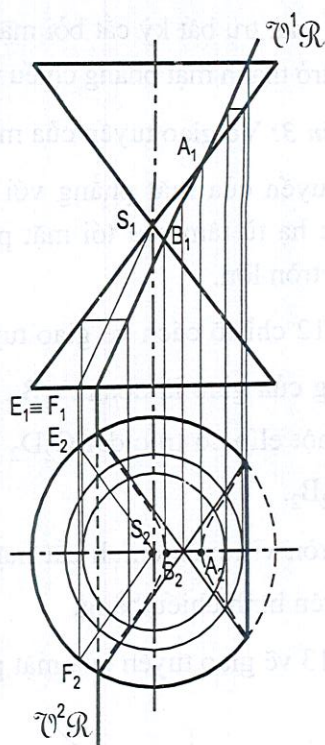
Khi vẽ giao tuyến của mặt phẳng bất kỳ với mặt nón có thể đưa về dạng trình bày trên bằng cách thay mặt phẳng hình chiếu để mặt phẳng cắt trở thành mặt phẳng chiếu. Tuy nhiên cũng có thể giải quyết bài toán bằng những cách khác.



Hình 108



Hình 109



Hình 110

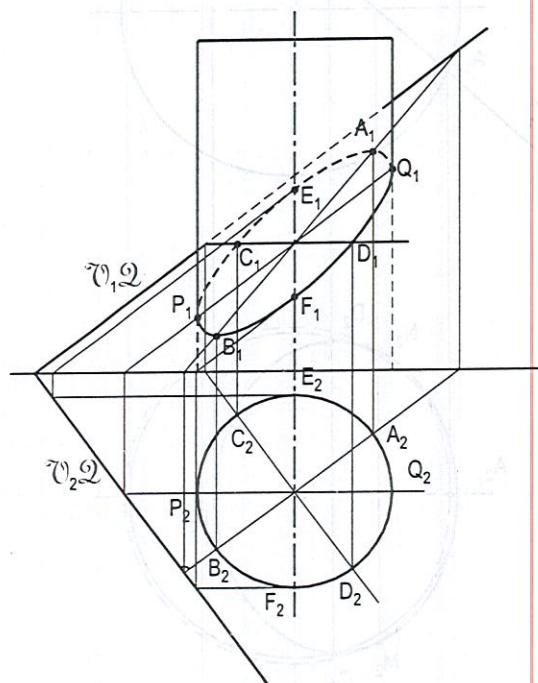
Bài toán 2: Vẽ giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ với mặt trụ tròn xoay (hình 111).

Vì mặt trụ có đường sinh là đường thẳng chiếu bằng nên giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ với mặt nón là một elip có hình chiếu bằng trùng với hình chiếu bằng của mặt trụ.

Hình chiếu đứng của giao tuyến là một elip, có thể vẽ từng điểm của nó. Tuy nhiên cần lưu ý các điểm sau:

- Cặp điểm cao nhất và thấp nhất (trục dài AB).
- Trục ngắn CD là đường bằng.
- Giới hạn thấy - khuất trên hình chiếu đứng P và $\mathcal{Q}$.
- Cặp điểm gần nhất và xa nhất E, F.

Chú ý: A_1B_1 , C_1D_1 là cặp đường kính liên hiệp của elip hình chiếu đứng.



Hình 111

Đối với mặt trụ bất kỳ cắt bởi mặt phẳng bất kỳ ta sẽ thay mặt phẳng hình chiếu để mặt phẳng cắt trở thành mặt phẳng chiếu và giải quyết bài toán tương tự như đối với mặt nón.

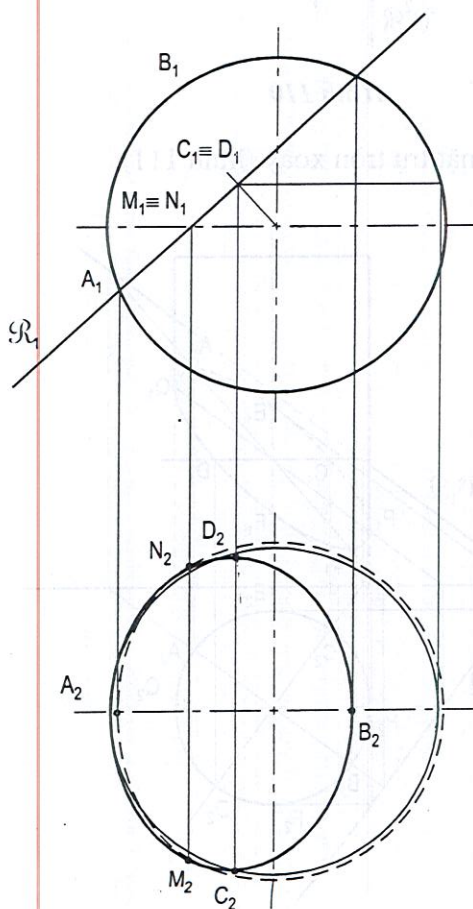
Bài toán 3: Vẽ giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$ với mặt cầu.

Giao tuyến của mặt phẳng với mặt cầu là một đường tròn, có tâm là chân đường vuông góc hạ từ tâm cầu tới mặt phẳng cắt. Nếu mặt phẳng đi qua tâm cầu sẽ cắt cầu theo vòng tròn lớn.

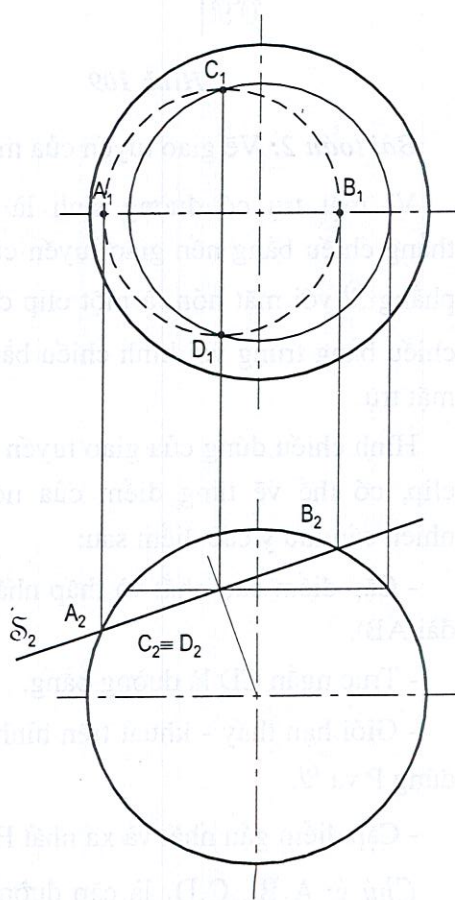
Hình 112 chỉ rõ cách vẽ giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$ với mặt cầu. Hình chiếu đứng của giao là đoạn A_1B_1 . Dễ dàng suy ra hình chiếu bằng của vòng tròn giao tuyến là một elíp có trục dài $C_2D_2 = A_1B_1$ (với $C_1 \equiv D_1$ là điểm giữa của A_1B_1) và trục ngắn là A_2B_2 .

Vòng tròn vĩ tuyến chính cắt mặt phẳng $\mathcal{R}$ tại hai điểm M, N là giới hạn thấy khuất của giao trên hình chiếu bằng.

Hình 113 vẽ giao tuyến của mặt phẳng chiếu bằng $\mathcal{S}$ với mặt cầu.



Hình 112



Hình 113

§3. GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT CONG

Để xác định giao điểm của một đường thẳng d với mặt cong - thường dùng phương pháp mặt phẳng phụ trợ, nội dung như sau:

- Qua đường thẳng d lập mặt phẳng phụ trợ $\mathcal{R}$.
- Vẽ giao tuyến của $\mathcal{R}$ với mặt cong.
- Xác định các giao điểm của đường thẳng d với giao tuyến phụ vừa vẽ. Đó là các giao điểm của đường thẳng d với mặt cong.

Cần lưu ý: Mặt phẳng phụ $\mathcal{R}$ cần chọn sao cho việc vẽ giao tuyến phụ được dễ dàng và chính xác, sau đây là một số ví dụ cụ thể:

Ví dụ 1: Xác định giao điểm của đường thẳng d với mặt nón có đáy thuộc mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{Q}$.

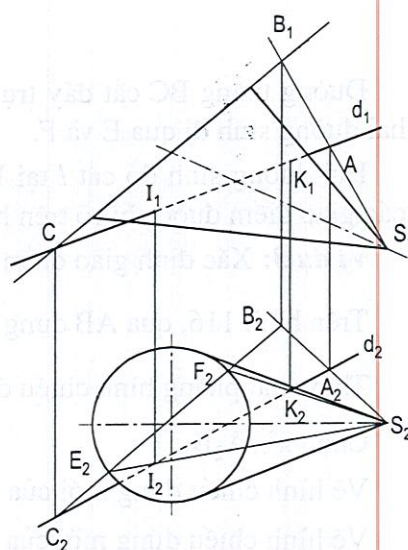
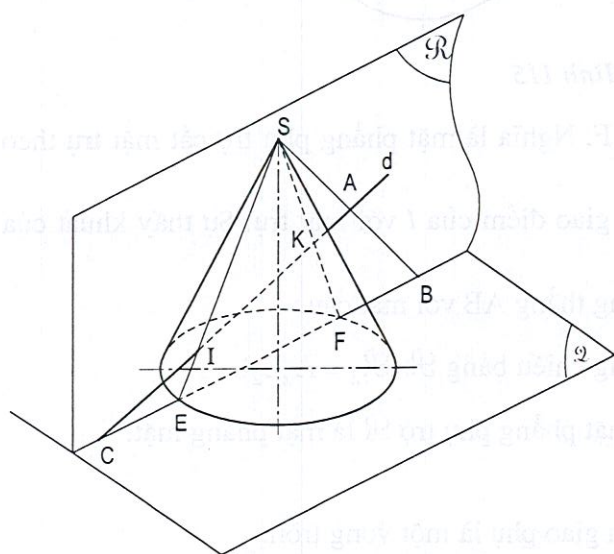
Nói chung khi vẽ giao của đường thẳng với mặt nón, thường chọn mặt phẳng phụ trợ chứa đường thẳng d và đi qua đỉnh nón sẽ cắt nón theo các đường sinh thẳng.

Trên hình 114 chỉ rõ cách vẽ giao tuyến của mặt phụ trợ với mặt nón. Lấy $A \in d$.

$$B = SA \cap \mathcal{Q}; \quad C = d \cap \mathcal{Q}.$$

Giao tuyến BC của mặt phẳng phụ trợ với mặt phẳng $\mathcal{Q}$ cắt đường chuẩn của mặt nón (đáy nón) tại E và F. Giao tuyến phụ trợ là tam giác SEF cắt đường thẳng d tại hai điểm I và K là giao điểm của đường thẳng d với mặt nón.

Trên hình biểu diễn I_1 thấy K_1 khuất và I_2 khuất K_2 thấy.



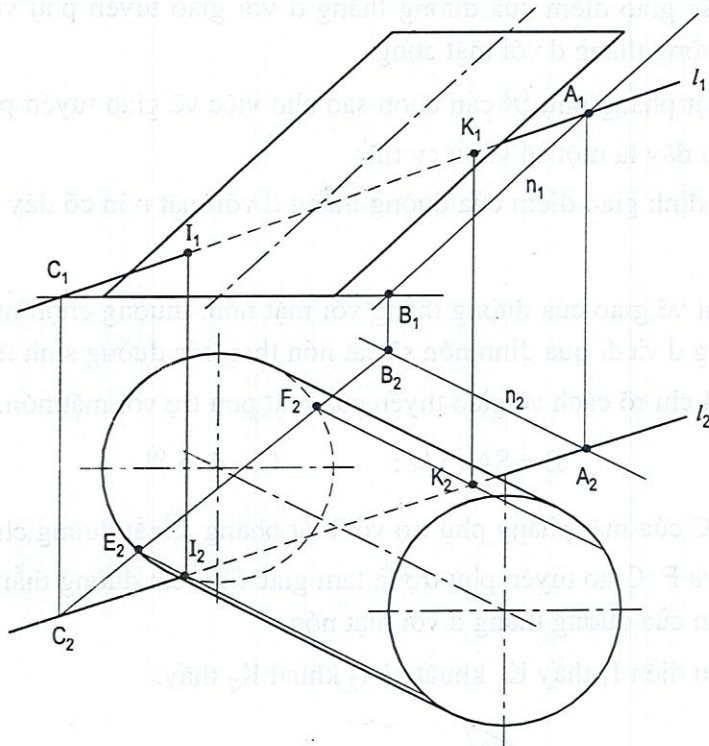
Hình 114

Ví dụ 2: Xác định giao điểm của đường thẳng l với mặt trụ có đáy thuộc mặt phẳng hình chiếu bằng.

Mặt phẳng phụ trợ được dựng qua đường thẳng l và song song với đường sinh của mặt trụ.

Trên hình 115 qua điểm $A \in l$ vẽ đường thẳng n song song với hướng đường sinh của trụ. Vẽ giao tuyến của mặt phẳng phụ trợ với mặt phẳng hình chiếu bằng là đường thẳng BC .

Ở đó $B = n \cap \mathcal{P}_2$; $C = l \cap \mathcal{P}_2$



Hình 115

Đường thẳng BC cắt đáy trụ tại E và F . Nghĩa là mặt phẳng phụ trợ cắt mặt trụ theo hai đường sinh đi qua E và F .

Hai đường sinh đó cắt l tại I và K là giao điểm của l với mặt trụ. Sự thấy khuất của các giao điểm được chỉ rõ trên hình vẽ.

Ví dụ 3: Xác định giao điểm của đường thẳng AB với mặt cầu.

Trên hình 116, qua AB dựng mặt phẳng chiếu bằng $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}_2 \equiv A_2B_2$).

Thay mặt phẳng hình chiếu đứng để mặt phẳng phụ trợ $\mathcal{R}$ là mặt phẳng mặt.

Chọn $x' // A_2B_2$.

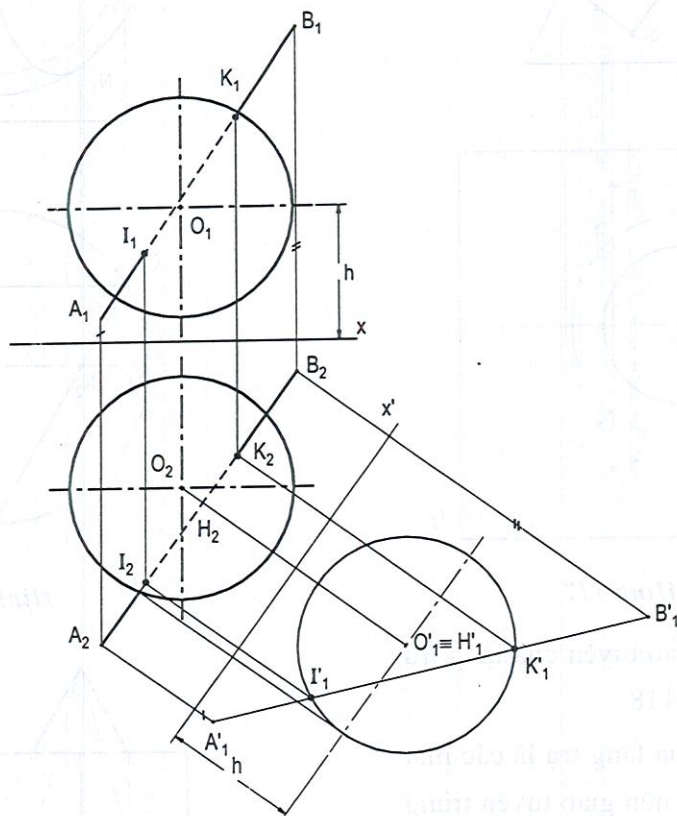
Vẽ hình chiếu đứng mới của vòng tròn giao phụ là một vòng tròn.

Vẽ hình chiếu đứng mới của AB là $A'_1B'_1$ cắt vòng tròn đó tại I'_1 và K'_1 là hình chiếu đứng mới của hai giao điểm cần xác định.

Từ I'_1 và K'_1 suy ra I_2, K_2 và I_1, K_1 .

I và K là giao điểm của AB với mặt cầu.

Chú ý: Có thể giải quyết bài toán bằng cách dùng mặt phẳng phụ trợ chứa AB và đi qua tâm cầu, sẽ cắt cầu theo vòng tròn lớn. Bằng cách quay mặt phẳng phụ trợ (OAB) quanh đường bằng (hay đường mặt) của nó cũng xác định được các giao điểm của AB với mặt cầu.



Hình 116

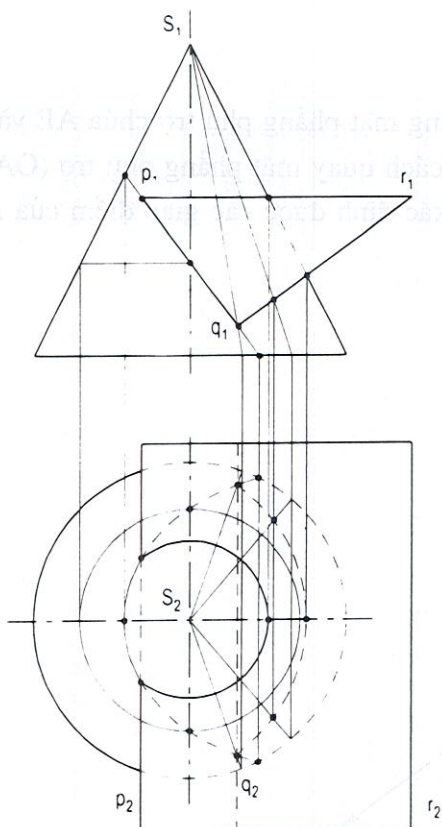
§4. GIAO CỦA ĐA DIỆN VỚI MẶT CONG

Giao tuyến của đa diện với mặt cong là một hay nhiều các đường cong phẳng riêng biệt nối với nhau tại các giao điểm của các cạnh đa diện với mặt cong. Để vẽ giao tuyến của đa diện với mặt cong người ta vẽ giao tuyến của từng mặt bên của đa diện với mặt cong. Sau đây là một số ví dụ:

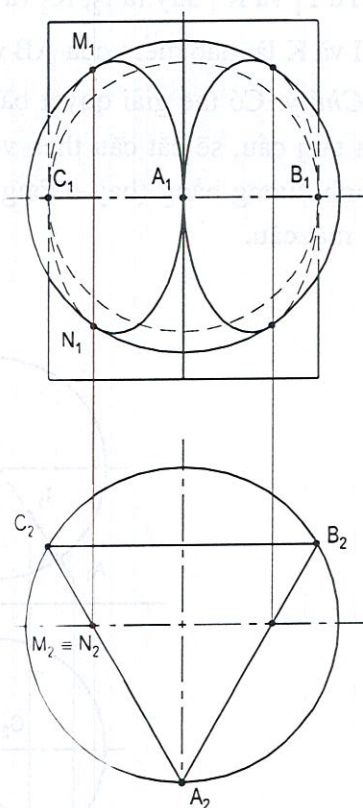
Ví dụ 1: Vẽ giao tuyến của lăng trụ (pqr) với mặt nón, hình 117.

Lăng trụ có các mặt bên là các mặt phẳng chiếu đứng nên hình chiếu đứng của giao tuyến trùng với hình chiếu đứng của lăng trụ.

Mặt bên (p/r) cắt mặt nón theo một đường tròn, còn các mặt bên (p/q) và (q/r) cắt mặt nón theo các cung elip.



Hình 117



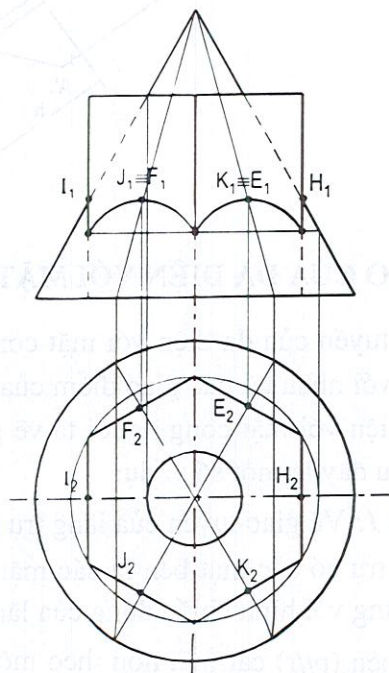
Hình 118

Ví dụ 2: Vẽ giao tuyến của lăng trụ với mặt cầu, hình 118.

Các mặt bên của lăng trụ là các mặt phẳng chiếu bằng nên giao tuyến trùng với hình chiếu bằng của lăng trụ.

Ba mặt bên của lăng trụ cắt mặt cầu theo 3 vòng tròn, tiếp xúc nhau tại A, B, C.

Ví dụ 3: Vẽ giao tuyến của lăng trụ lục giác đều thẳng đứng với mặt nón tròn xoay. Giao tuyến là các cung hypecbol có đỉnh là I, J, K, H, E, F (hình 119).



Hình 119

§5. GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT CONG

Giao tuyến của hai mặt cong thường là một hay nhiều các đường cong ghềnh. Bậc của đường cong giao tuyến bằng tích số bậc của hai mặt cong đại số.

Để vẽ giao tuyến của hai mặt cong người ta xác định một số điểm đồng thời thuộc cả hai mặt cong đó bằng cách cắt cả hai mặt cong bởi mặt phụ trợ thứ ba, các giao tuyến phụ trợ cắt nhau tại các điểm thuộc giao cần tìm.

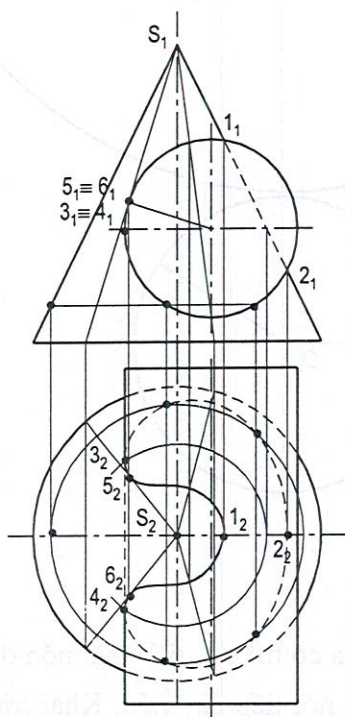
Ví dụ 1: Vẽ giao tuyến của mặt nón và mặt trụ (hình 120).

Giao của hai mặt bậc hai là đường cong ghềnh bậc bốn. Vì mặt trụ có đường sinh là đường thẳng chiếu đứng nên hình chiếu đứng của giao tuyến trùng với hình chiếu đứng của mặt trụ, đó là cung tròn lớn $1_1 2_1$ hình chiếu bằng của giao tuyến xác định được nhờ các mặt phẳng chiếu đứng cắt cả hai mặt cong.

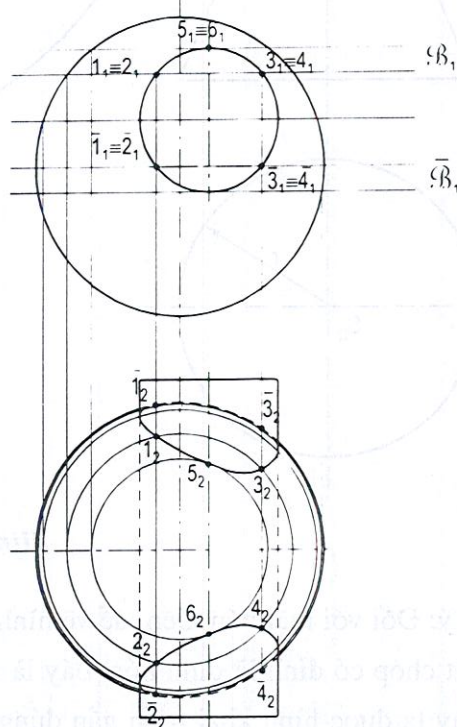
Ví dụ 2: Vẽ giao tuyến của mặt trụ với mặt cầu.

Trên hình 121 chỉ rõ cách vẽ giao tuyến của mặt trụ với mặt cầu bằng cách sử dụng các mặt phẳng cắt là các mặt phẳng bằng.

Mặt phẳng bằng β và $\bar{\beta}$ cắt mặt cầu theo các vòng tròn, cắt mặt trụ theo các đường sinh là các đường thẳng chiếu đứng, cho một số điểm của giao tuyến là 1, 2, 3, 4 và $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$.



Hình 120



Hình 121

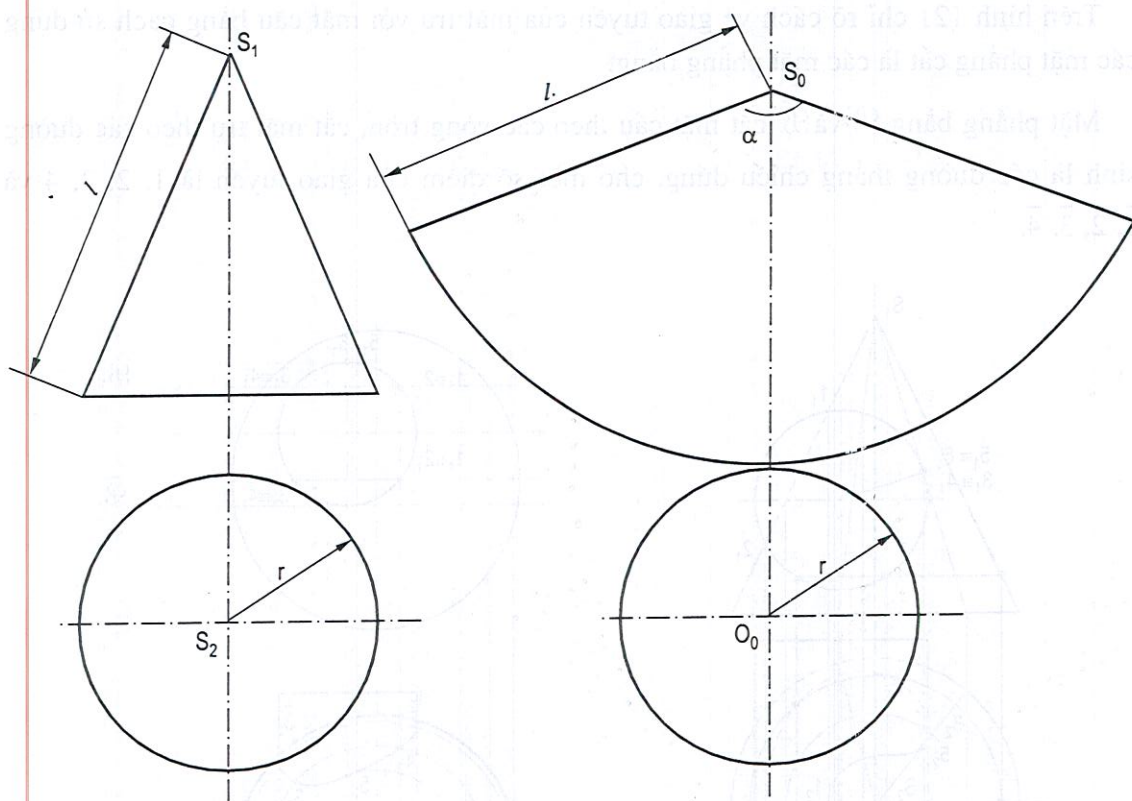
§6. KHAI TRIỂN MẶT CONG

Có mặt cong như mặt trụ, mặt nón.... có thể khai triển được, nói một cách khác có thể trải chúng lên một mặt phẳng. Các mặt cong khác như mặt cầu, mặt xoắn... không khai triển thành hình phẳng được, khi đó người ta phải khai triển gần đúng các mặt đó.

Dưới đây chỉ giới thiệu cách vẽ hình khai triển của mặt nón và mặt trụ.

Ví dụ 1: Vẽ hình khai triển của mặt nón tròn xoay, đường tròn đáy có bán kính là r và đường sinh có độ dài là l (hình 122).

Hình khai triển gồm một hình tròn bán kính r và một hình quạt tròn bán kính là l và góc ở tâm là $\alpha = 360^\circ \frac{r}{l}$ - hình khai triển mặt xung quanh của mặt nón.



Hình 122

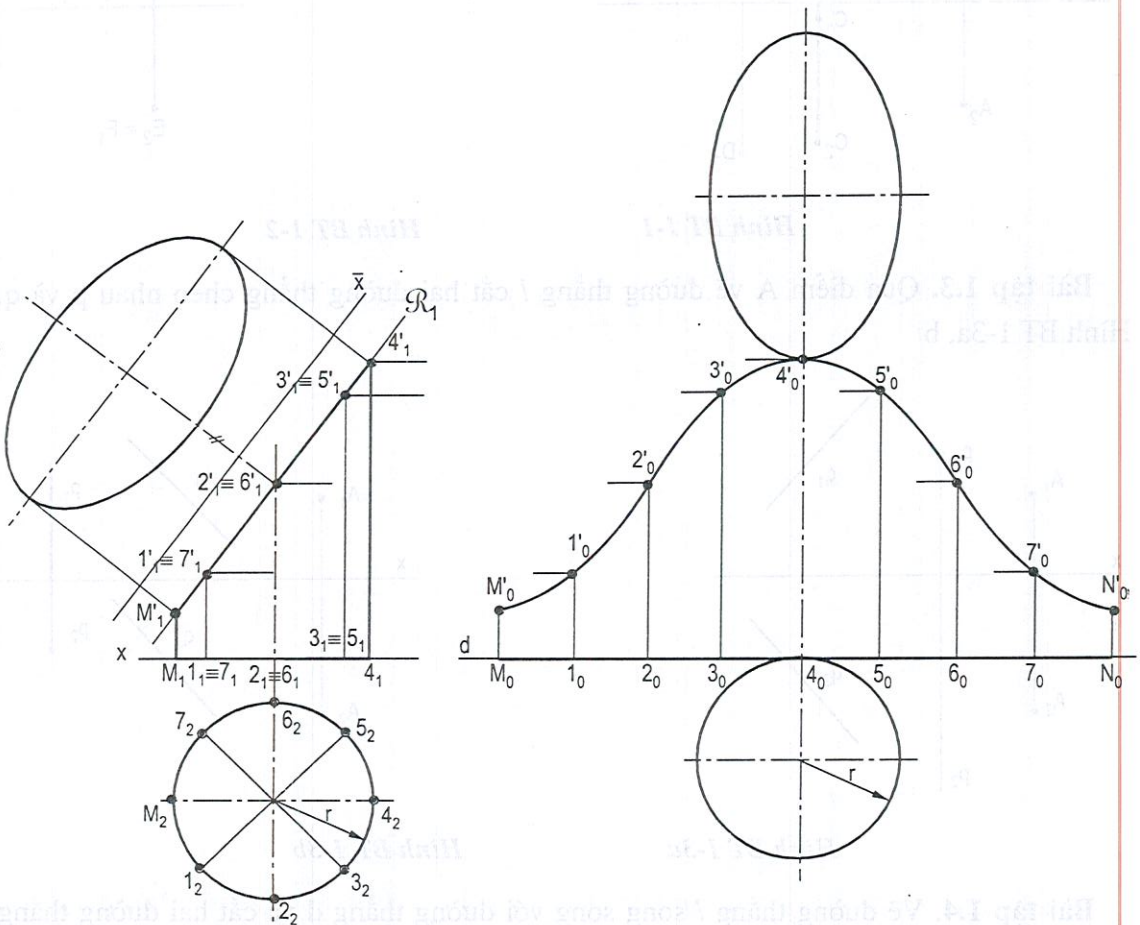
Chú ý: Đối với mặt nón xiên, để vẽ hình khai triển ta có thể nội tiếp mặt nón đó bằng một mặt chóp có đỉnh là đỉnh nón, đáy là một đa giác nội tiếp đáy nón. Khai triển mặt chóp này ta được hình khai triển gần đúng của mặt nón. Số cạnh của đa giác đáy chóp càng nhiều thì hình khai triển của mặt nón càng chính xác.

Ví dụ 2: Vẽ hình khai triển của mặt trụ tròn xoay thẳng đứng, đáy là đường tròn bán kính r và bị cắt bởi mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$ (hình 123).

Vẽ hình khai triển mặt xung quanh của mặt trụ. Chia đường tròn đáy trụ làm một số phần đều nhau, thí dụ 8 phần và vẽ hình chiếu đứng của các đường sinh đi qua các điểm chia đó của mặt trụ.

Trên đường thẳng nằm ngang d đặt một đoạn thẳng $M_0N_0 = 2\pi r$ và cũng chia M_0N_0 là 8 phần đều nhau. Qua các điểm chia $M_0, 1_0, 2_0, 3_0, \dots, 7_0, N_0$ vẽ các đường thẳng vuông góc với d và đặt trên đó các đoạn thẳng có chiều dài bằng chiều dài của các đường sinh vẽ qua các điểm chia tương ứng trên mặt trụ. Nối các điểm $M'_0, 1'_0, 2'_0, 3'_0, \dots, 7'_0$ bằng đường cong tròn đều.

- Hình khai triển của đáy dưới của trụ là hình tròn bán kính r .
- Hình khai triển của đáy trên là một elip mà độ lớn có thể xác định bằng cách thay mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}_2$ bằng $\mathcal{P}_2' // \mathcal{R}$

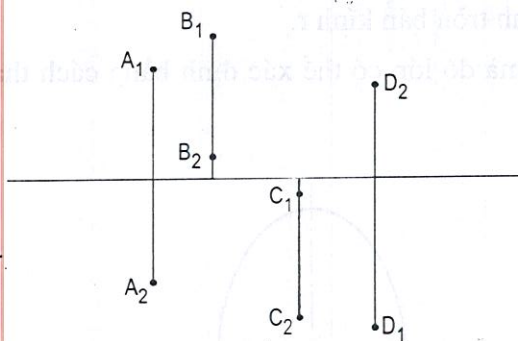


Hình 123

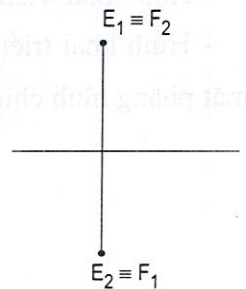
BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài tập 1.1. Vẽ hình chiếu cạnh của các điểm A, B, C, D cho trước như hình BT 1-1

Bài tập 1.2. Khi nào hai điểm E và F có hình chiếu đứng của điểm này trùng với hình chiếu bằng của điểm kia ($E_1 \equiv F_2$, $E_2 \equiv F_1$). Hình BT 1-2

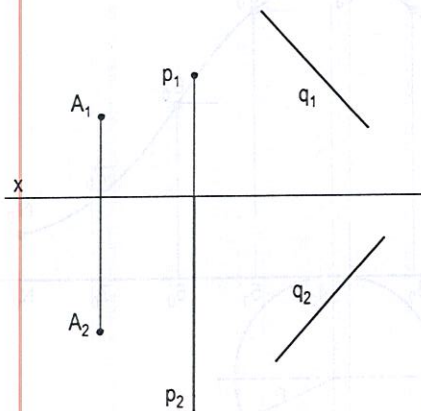


Hình BT 1-1

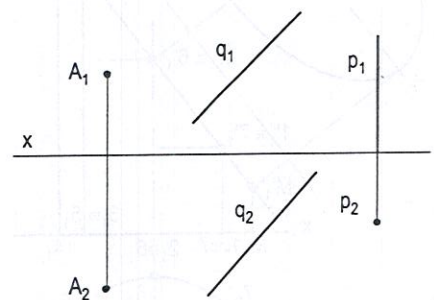


Hình BT 1-2

Bài tập 1.3. Qua điểm A vẽ đường thẳng l cắt hai đường thẳng chéo nhau p và q .
Hình BT 1-3a, b

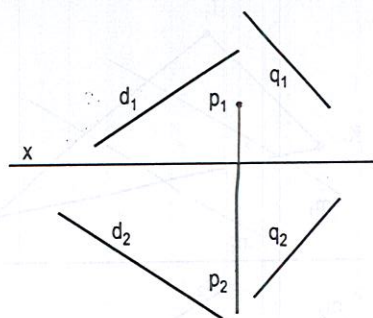


Hình BT 1-3a

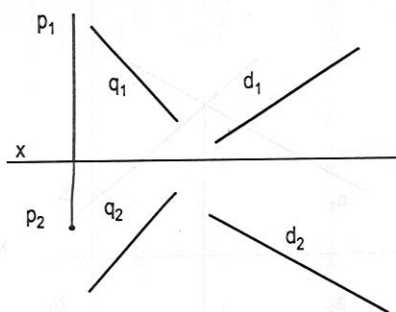


Hình BT 1-3b

Bài tập 1.4. Vẽ đường thẳng l song song với đường thẳng d và cắt hai đường thẳng chéo nhau p , q . Hình BT 1-4a, b



Hình BT 1-4a

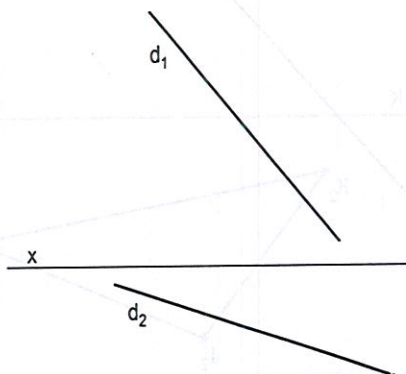


Hình BT 1-4b

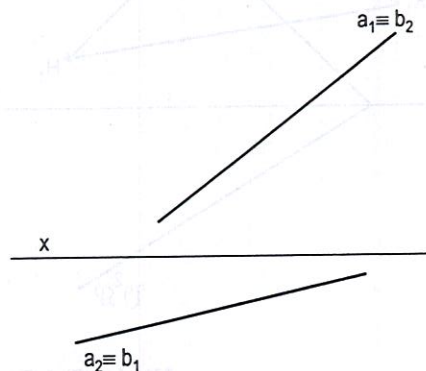
Bài tập 1.5. Cho đường thẳng d như hình BT 1-5. Hãy tìm trên đường thẳng d :

- Điểm A có độ cao bằng 0.
- Điểm B có độ xa bằng 0.
- Điểm C có hai hình chiếu trùng nhau.
- Điểm D có hai hình chiếu đối xứng nhau qua x .
- Nhận xét vị trí các điểm A, B, C, D.

Bài tập 1.6. Vẽ các vết của mặt phẳng $\mathcal{P}$ ($a \cap b$), ở đó $a_1 \equiv b_2$, $a_2 \equiv b_1$. Hình BT 1-6



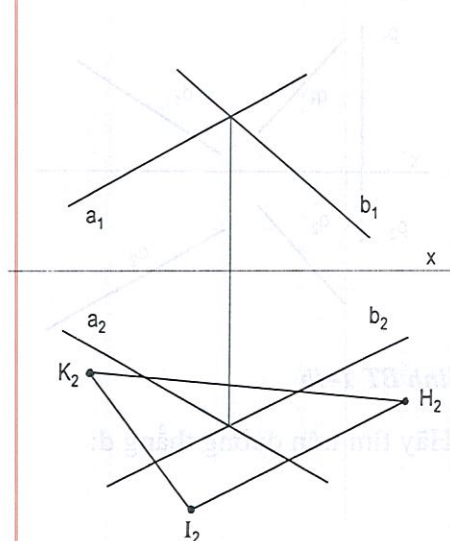
Hình BT 1-5



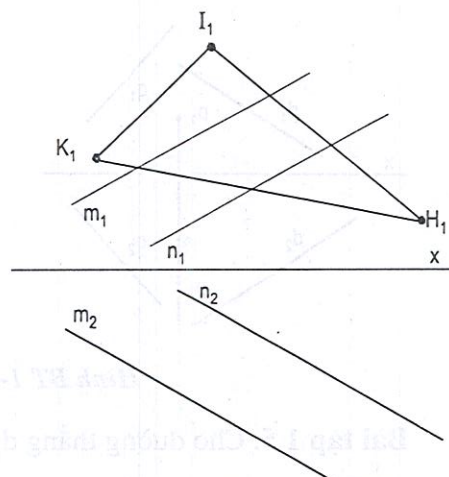
Hình BT 1-6

Bài tập 1.7. Vẽ hình chiếu còn lại của tam giác IKH thuộc mặt phẳng $\mathcal{P}$ cho trong các trường hợp sau:

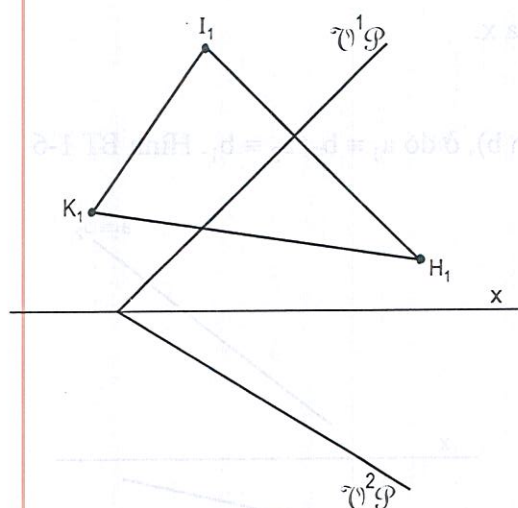
- $\mathcal{P}(a \cap b)$. Hình BT 1-7a
- $\mathcal{P}(m \parallel n)$. Hình BT 1-7b
- $\mathcal{P}(\mathcal{V}^1 \mathcal{P}, \mathcal{V}^2 \mathcal{P})$. Hình 1-7c
- $\mathcal{P}(\mathcal{V}^1 \mathcal{P} \equiv \mathcal{V}^2 \mathcal{P})$. Hình 1-7d



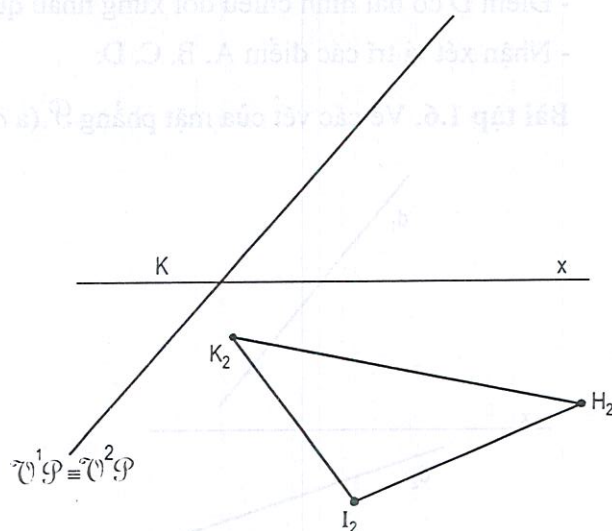
Hình BT 1-7a



Hình BT 1-7b



Hình BT 1-7c

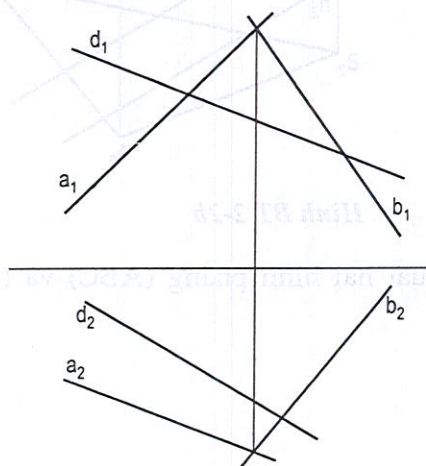


Hình BT 1-7d

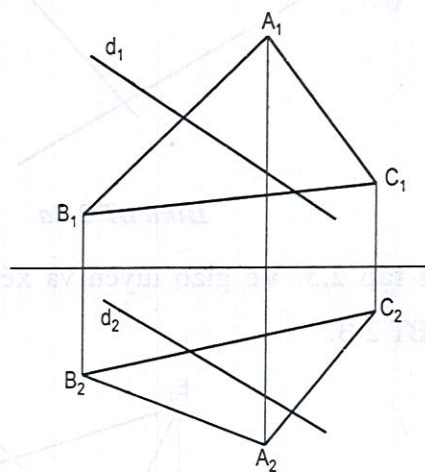
BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài tập 2.1. Xác định giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng $\mathcal{P}$, cho trong các trường hợp sau:

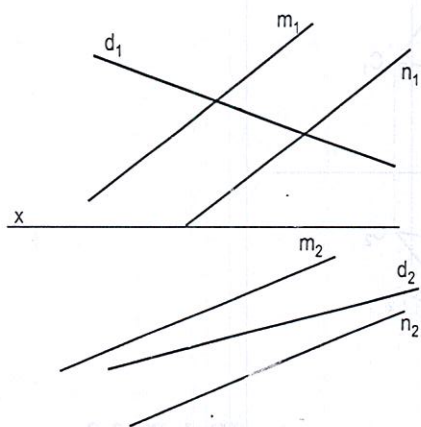
- $\mathcal{P}(a \times b)$. Hình BT 2-1a
- $\mathcal{P}(ABC)$. Hình BT 2-1b
- $\mathcal{P}(m/n)$. Hình BT 2-1c
- $\mathcal{P}(\mathcal{V}^1\mathcal{P}, \mathcal{V}^2\mathcal{P})$. Hình BT 2-1d



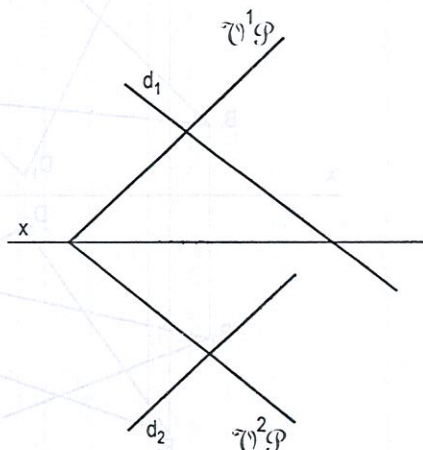
Hình BT 2-1a



Hình BT 2-1b



Hình BT 2-1c

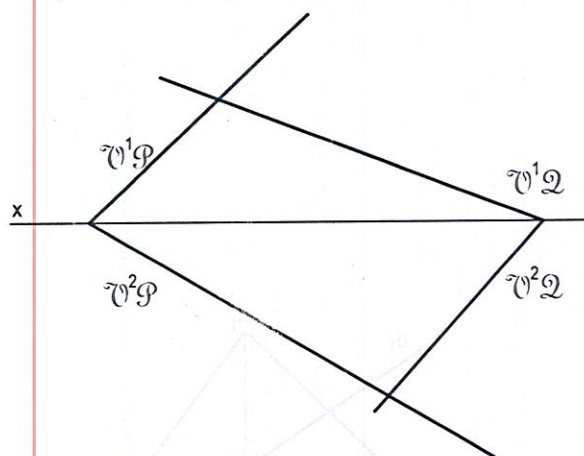


Hình BT 2-1d

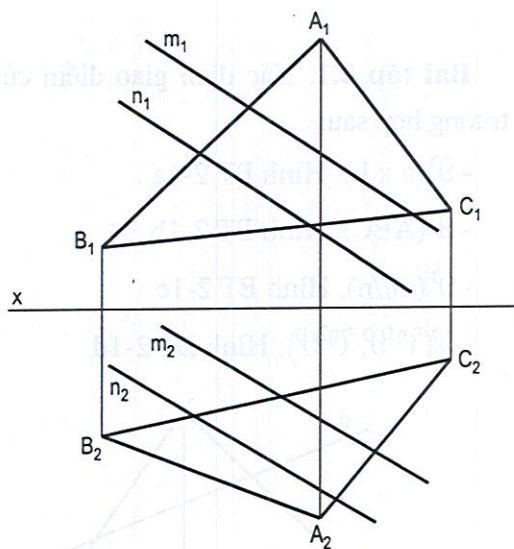
Bài tập 2.2. Vẽ giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{P}$ với mặt phẳng $\mathcal{Q}$ cho trong các trường hợp sau:

- $\mathcal{P}(\mathcal{V}^1\mathcal{P}, \mathcal{V}^2\mathcal{P})$ và $\mathcal{Q}(\mathcal{V}^1\mathcal{Q}, \mathcal{V}^2\mathcal{Q})$. Hình BT 2-2a

- $\mathcal{P}(ABC)$ và $\mathcal{Q}(m/n)$. Hình BT 2-2b

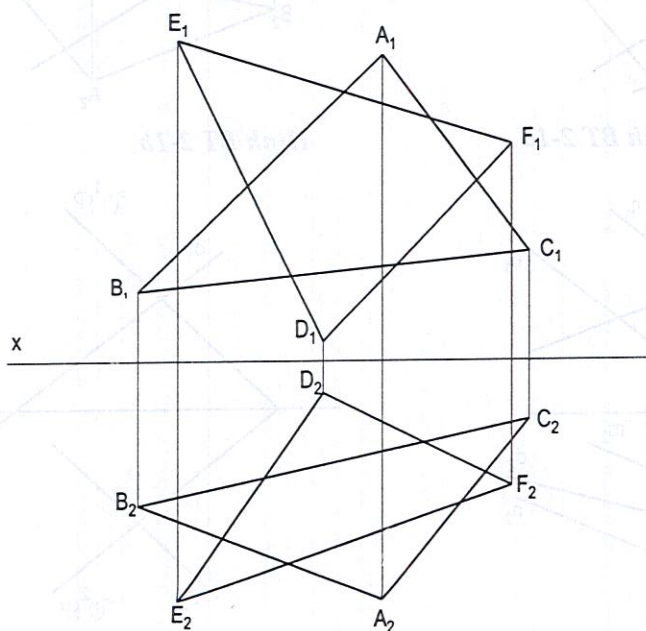


Hình BT 2-2a



Hình BT 2-2b

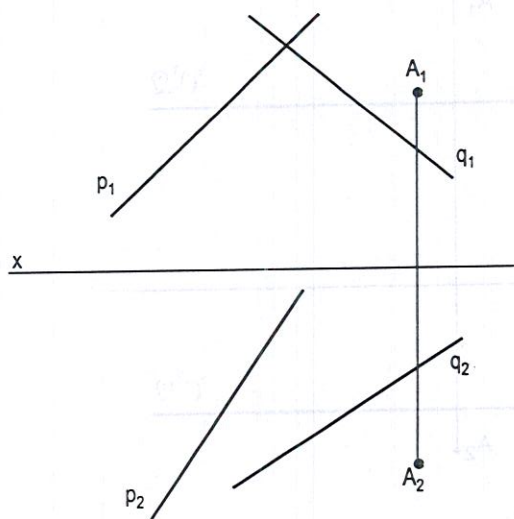
Bài tập 2.3. Vẽ giao tuyến và xét thấy khuất hai hình phẳng (ABC) và (DEF).
Hình BT 2-3.



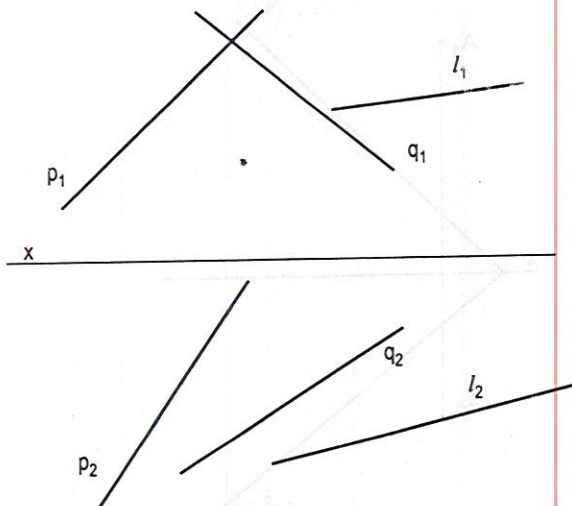
Hình BT 2-3

Bài tập 2.4. Qua điểm A, vẽ đường thẳng d cắt cả hai đường thẳng chéo nhau p và q.
Hình BT 2-4.

Bài tập 2.5. Vẽ đường thẳng d song song với đường thẳng l và cắt hai đường thẳng chéo nhau p, q. Hình BT 2-5.

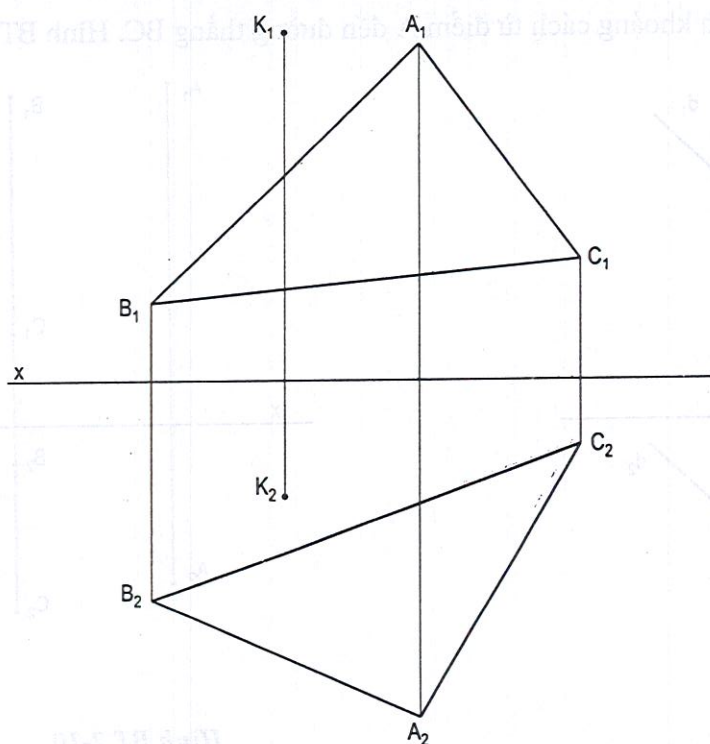


Hình BT 2-4



Hình BT 2-5

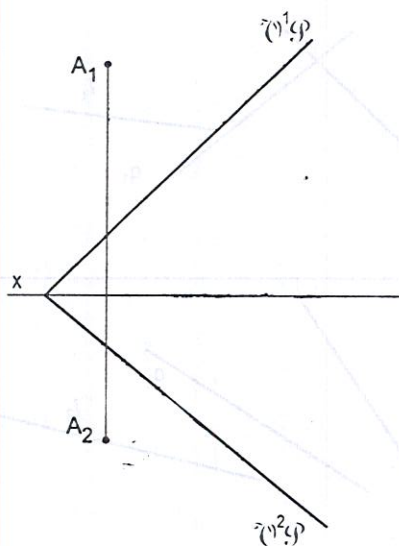
Bài tập 2.6. Xác định khoảng cách từ điểm K đến mặt phẳng $\mathcal{P}(ABC)$. Hình BT 2-6.



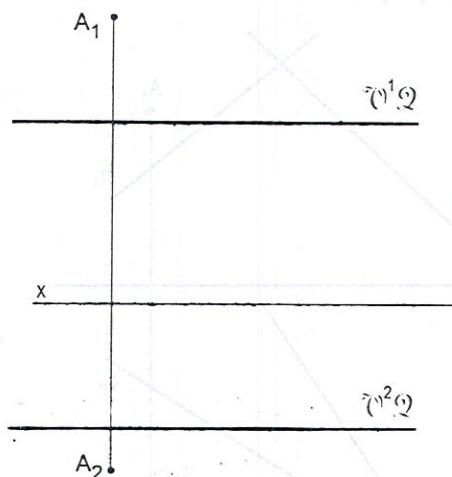
Hình BT 2-6

Bài tập 2.7. Xác định khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\mathcal{P}(\gamma^1\mathcal{P}, \gamma^2\mathcal{P})$. Hình BT 2-7

Bài tập 2.8. Xác định khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\mathcal{Q}(\gamma^1\mathcal{Q}, \gamma^2\mathcal{Q})$. Hình BT 2-8



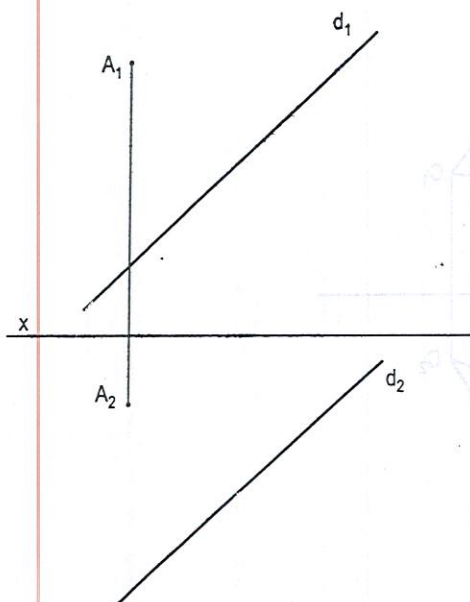
Hình BT 2-7



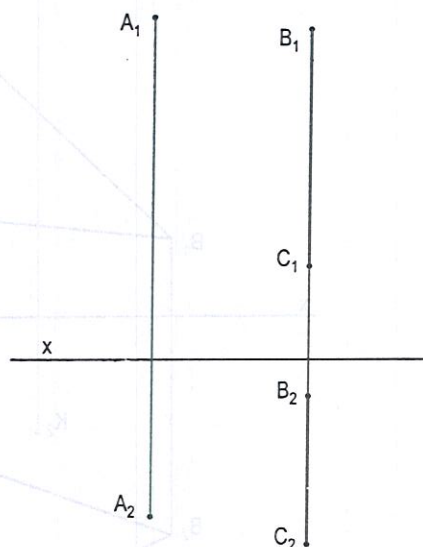
Hình BT 2-8

Bài tập 2.9. Xác định khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d. Hình BT 2-9

Bài tập 2.10. Xác định khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC. Hình BT 2-10



Hình BT 2-9

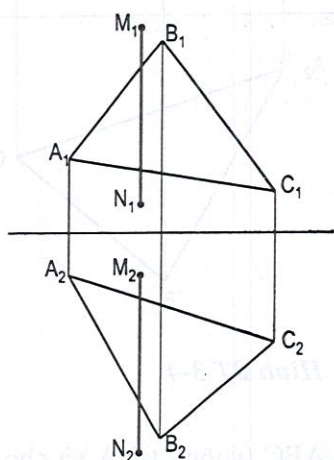


Hình BT 2-10

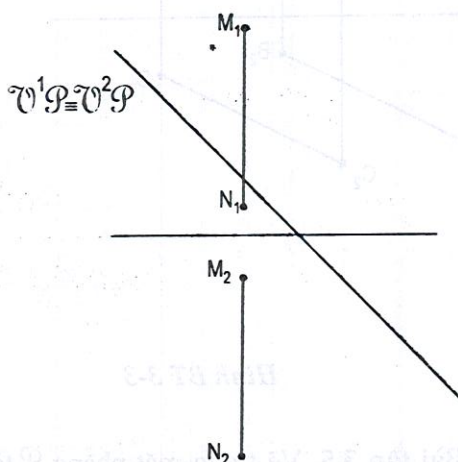
BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài tập 3.1. Xác định giao điểm của đường cạnh MN với mặt phẳng $\mathcal{P}$ trong các trường hợp sau:

- $\mathcal{P}(A, B, C)$. Hình BT 3-1a.
- $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}^1\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{V}}^2\mathcal{P})$. Hình BT 3-1b



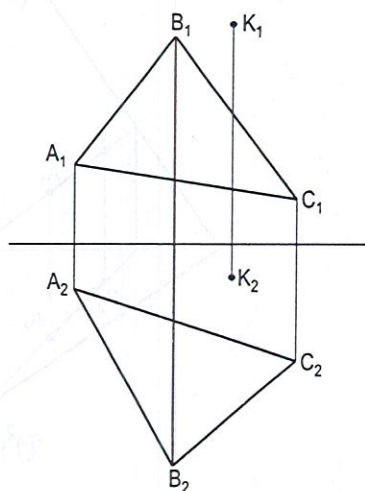
Hình BT 3-1a



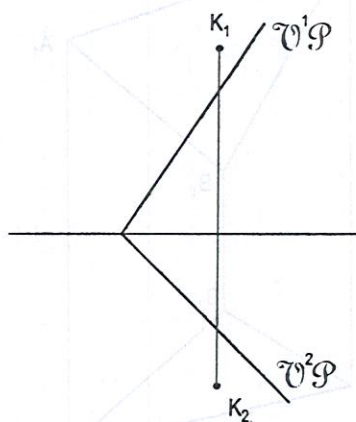
Hình BT 3-1b

Bài tập 3.2. Xác định khoảng cách từ điểm K đến mặt phẳng $\mathcal{P}$ trong các trường hợp sau:

- $\mathcal{P}(A, B, C)$. Hình BT 3-2a.
- $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}^1\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{V}}^2\mathcal{P})$. Hình BT 3-2b.



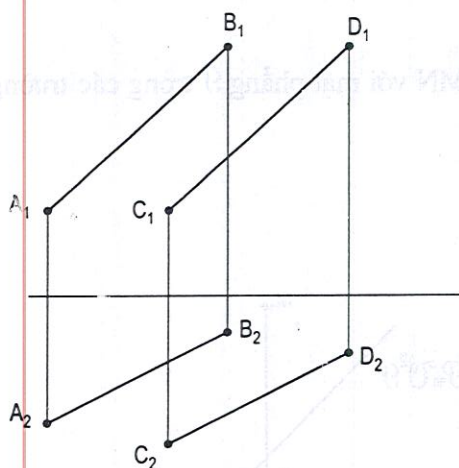
Hình BT 3-2a



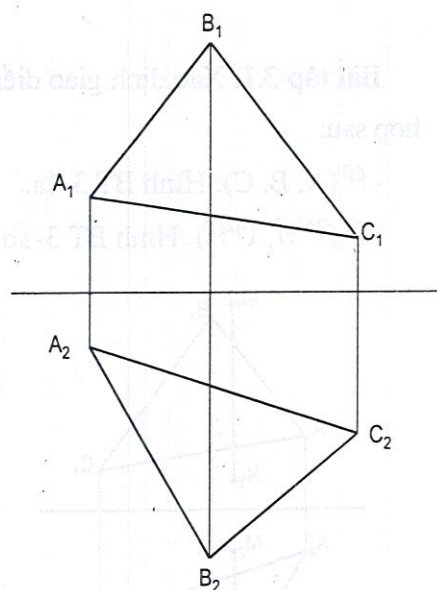
Hình BT 3-2b

Bài tập 3.3. Xác định khoảng cách của hai đường thẳng song song $AB//CD$. Hình BT 3-3.

Bài tập 3.4. Xác định độ lớn của tam giác ABC . Hình BT 3-4.



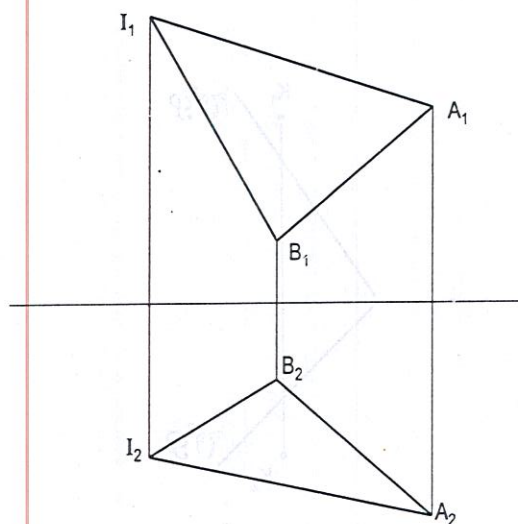
Hình BT 3-3



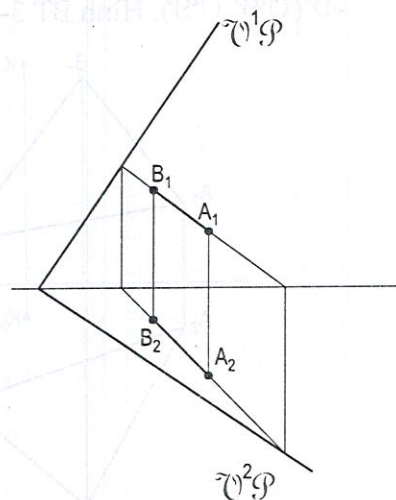
Hình BT 3-4

Bài tập 3.5. Vẽ trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ tam giác vuông cân ABC (vuông tại A và cho trước AB) trong các trường hợp:

- $\mathcal{P}(I, A, B)$. Hình BT 3-5a.
- $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}}^1\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{V}}^2\mathcal{P})$. Hình BT 3-5b.

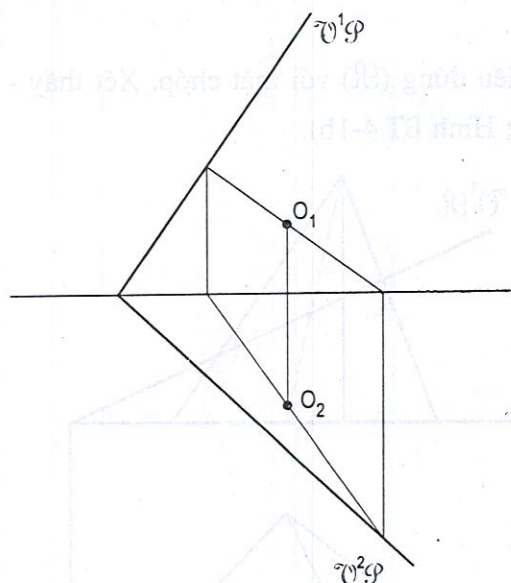


Hình BT 3-5a

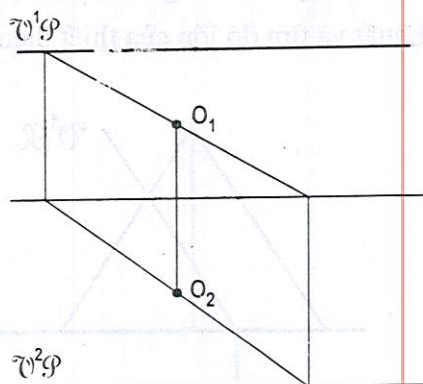


Hình BT 3-5b

Bài tập 3.6. Vẽ trong mặt phẳng $\mathcal{P}(\mathcal{V}^1\mathcal{P}, \mathcal{V}^2\mathcal{P})$, vòng tròn tâm O , bán kính R cho trước.
 Hình BT 3-6a; Hình BT 3-6b.



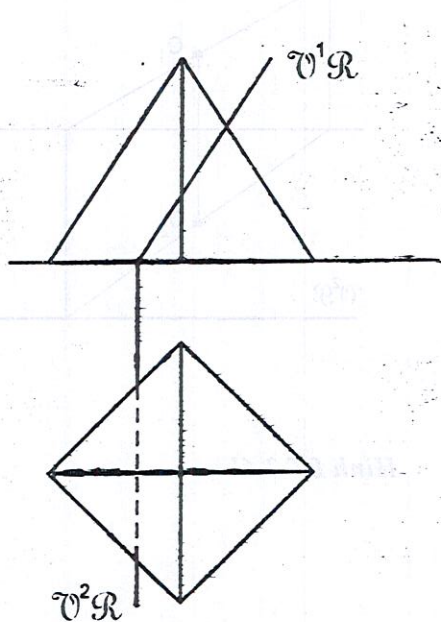
Hình BT 3-6a



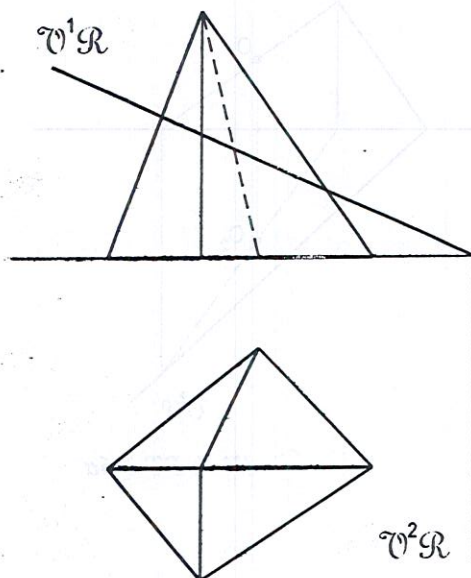
Hình BT 3-6b

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Bài tập 4.1. Vẽ giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng ($\mathcal{R}$) với mặt chóp. Xét thấy - khuất và tìm độ lớn của thiết diện. (Hình BT 4-1a; Hình BT 4-1b).

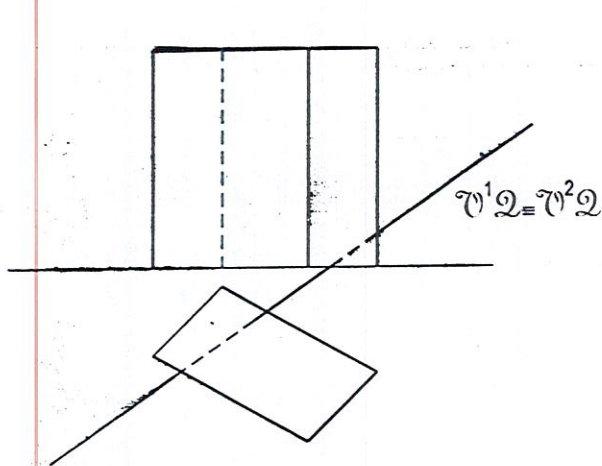


Hình BT 4-1a

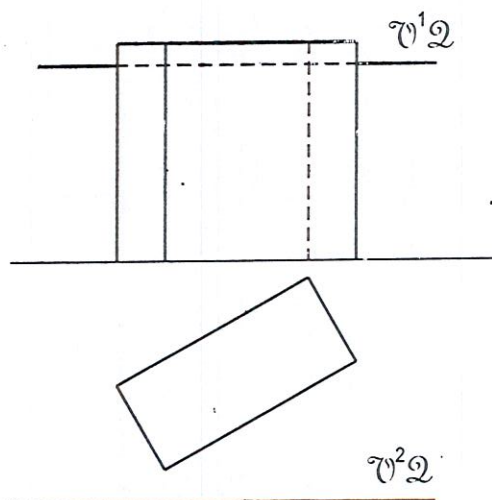


Hình BT 4-1b

Bài tập 4.2. Vẽ giao tuyến của mặt phẳng ($\mathcal{Q}$) với lăng trụ và xét thấy - khuất. (Hình BT 4-2a; Hình BT 4-2b).

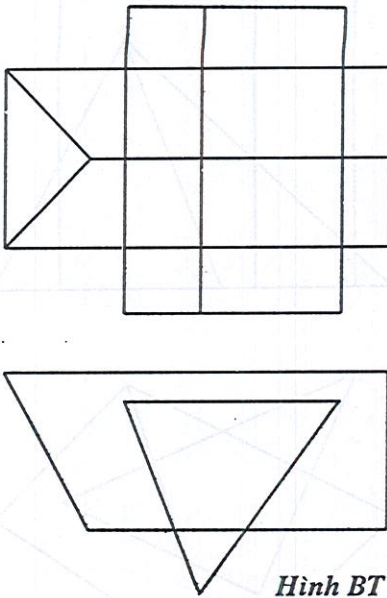


Hình BT 4-2a

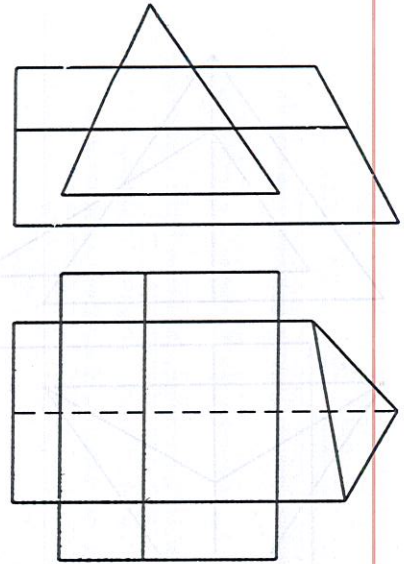


Hình BT 4-2b

Bài tập 4.3. Vẽ giao tuyến và xét thấy - khuất hai lăng trụ. (Hình BT 4-3a; Hình BT 4-3b; Hình BT 4-3c).

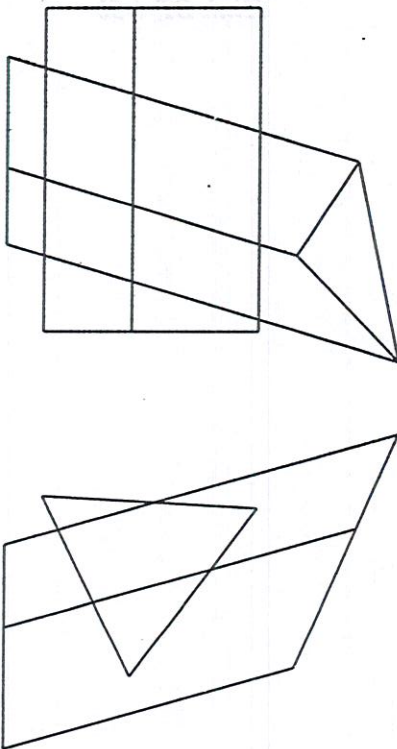


Hình BT 4-3a

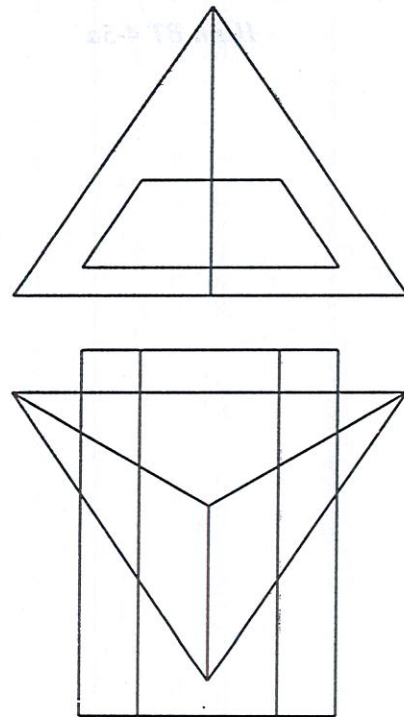


Hình BT 4-3b

Bài tập 4.4. Vẽ giao tuyến và xét thấy - khuất của mặt chóp và lăng trụ. (Hình BT 4-4).

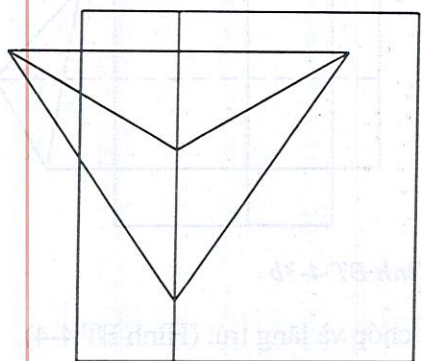
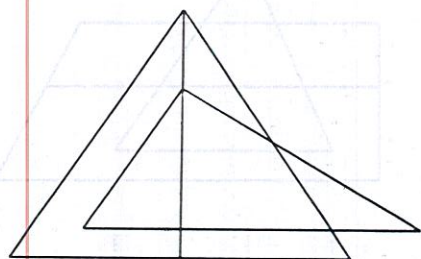


Hình BT 4-3c

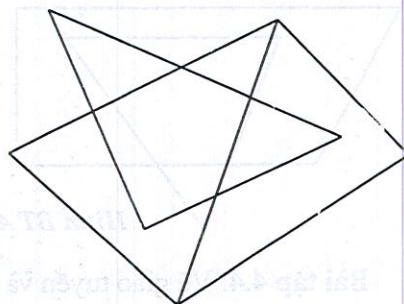
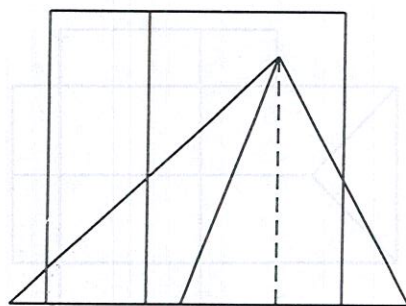


Hình BT 4-4

Bài tập 4.5. Vẽ giao tuyến và xét thấy - khuất mặt chóp và lăng trụ. (Hình BT 4-5a; Hình BT 4-5b).



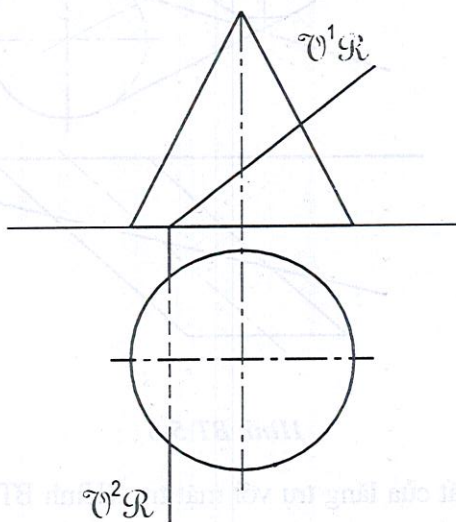
Hình BT 4-5a



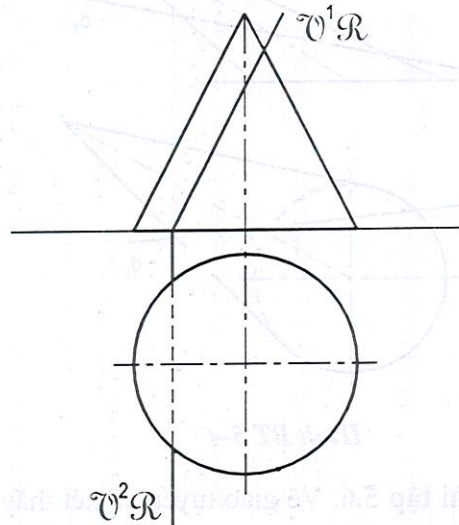
Hình BT 4-5b

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Bài tập 5.1. Vẽ giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng ($\mathcal{R}$) với mặt nón tròn xoay. Xét thấy - khuất và tìm độ lớn của thiết diện. (Hình BT 5-1a; Hình BT 5-1b).



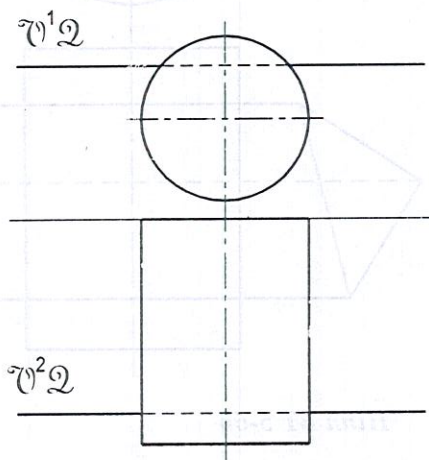
Hình BT 5-1a



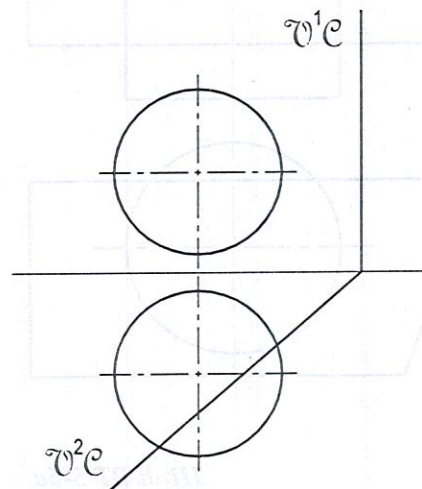
Hình BT 5-1b

Bài tập 5.2. Vẽ giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ ($V^1\mathcal{Q}, V^2\mathcal{Q}$) với mặt trụ và xét thấy - khuất, (Hình BT 5-2).

Bài tập 5.3. Vẽ giao tuyến của mặt phẳng chiếu bằng ($\mathcal{C}$) với mặt cầu và xét thấy - khuất, (Hình BT 5-3).



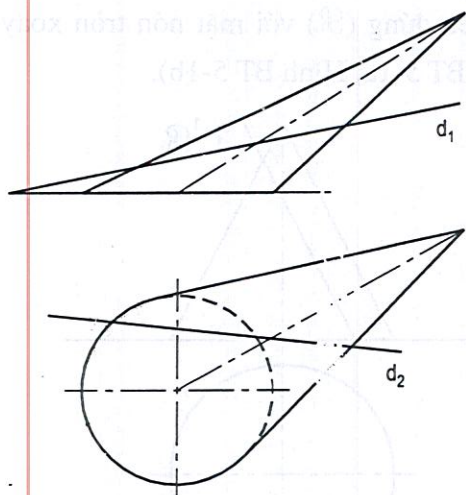
Hình BT 5-2



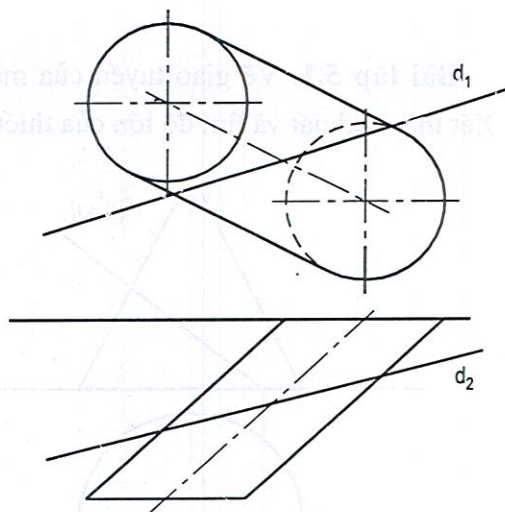
Hình BT 5-3

Bài tập 5.4. Xác định giao điểm của đường thẳng d với mặt nón. (Hình BT 5-4).

Bài tập 5.5. Xác định giao điểm của đường thẳng d với mặt trụ. (Hình BT 5-5).

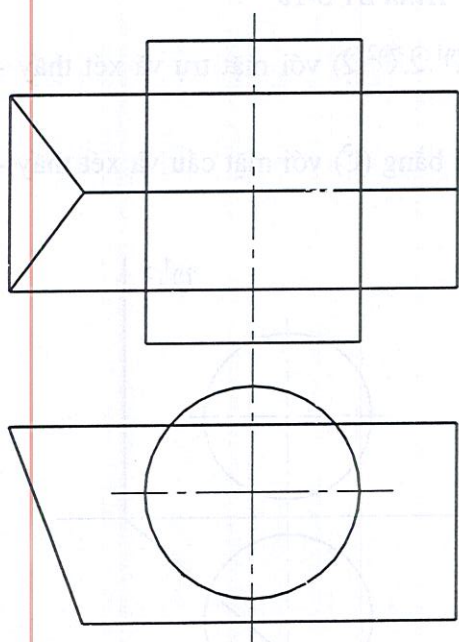


Hình BT 5-4

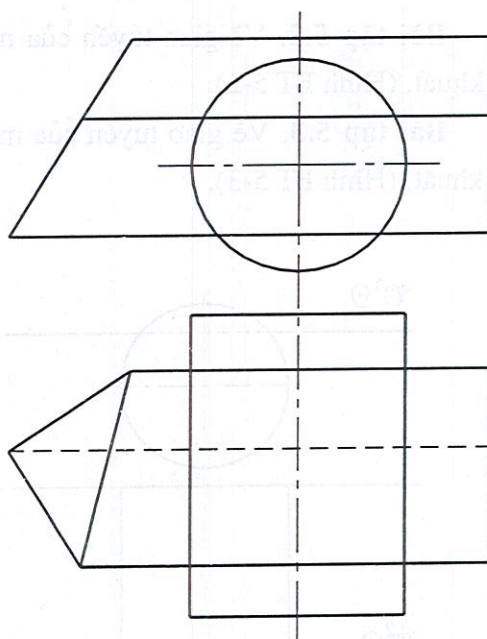


Hình BT 5-5

Bài tập 5.6. Vẽ giao tuyến và xét thấy - khuất của lăng trụ với mặt trụ. (Hình BT 5-6a; Hình BT 5-6b).

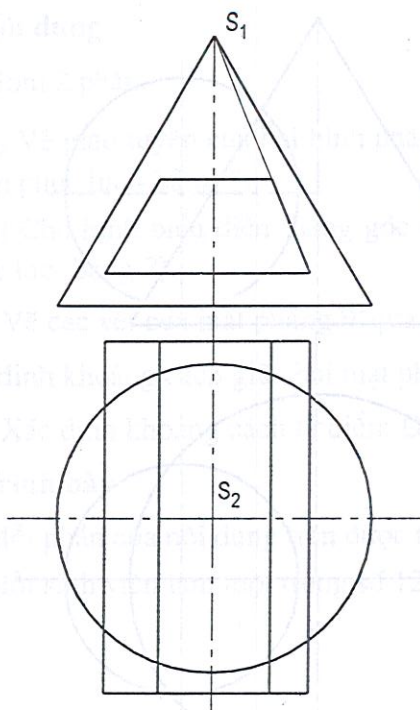


Hình BT 5-6a

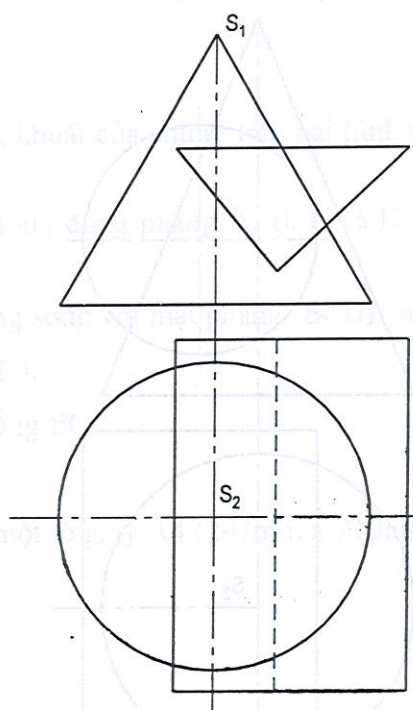


Hình BT 5-6b

Bài tập 5.7. Vẽ giao tuyến và xét thấy - khuất của lăng trụ với mặt nón. (Hình BT 5-7a; Hình BT 5-7b).

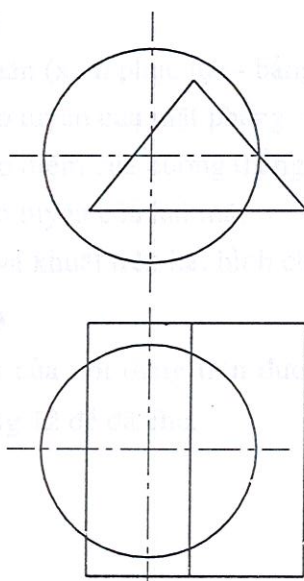


Hình BT 5-7a

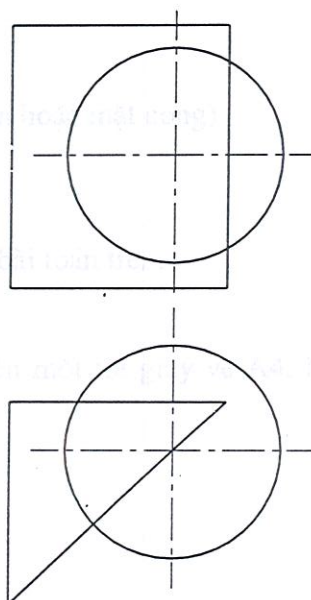


Hình BT 5-7b

Bài tập 5.8. Vẽ giao tuyến và xét thấy - khuất của lăng trụ với mặt cầu. (Hình BT 5-8a; Hình BT 5-8b).



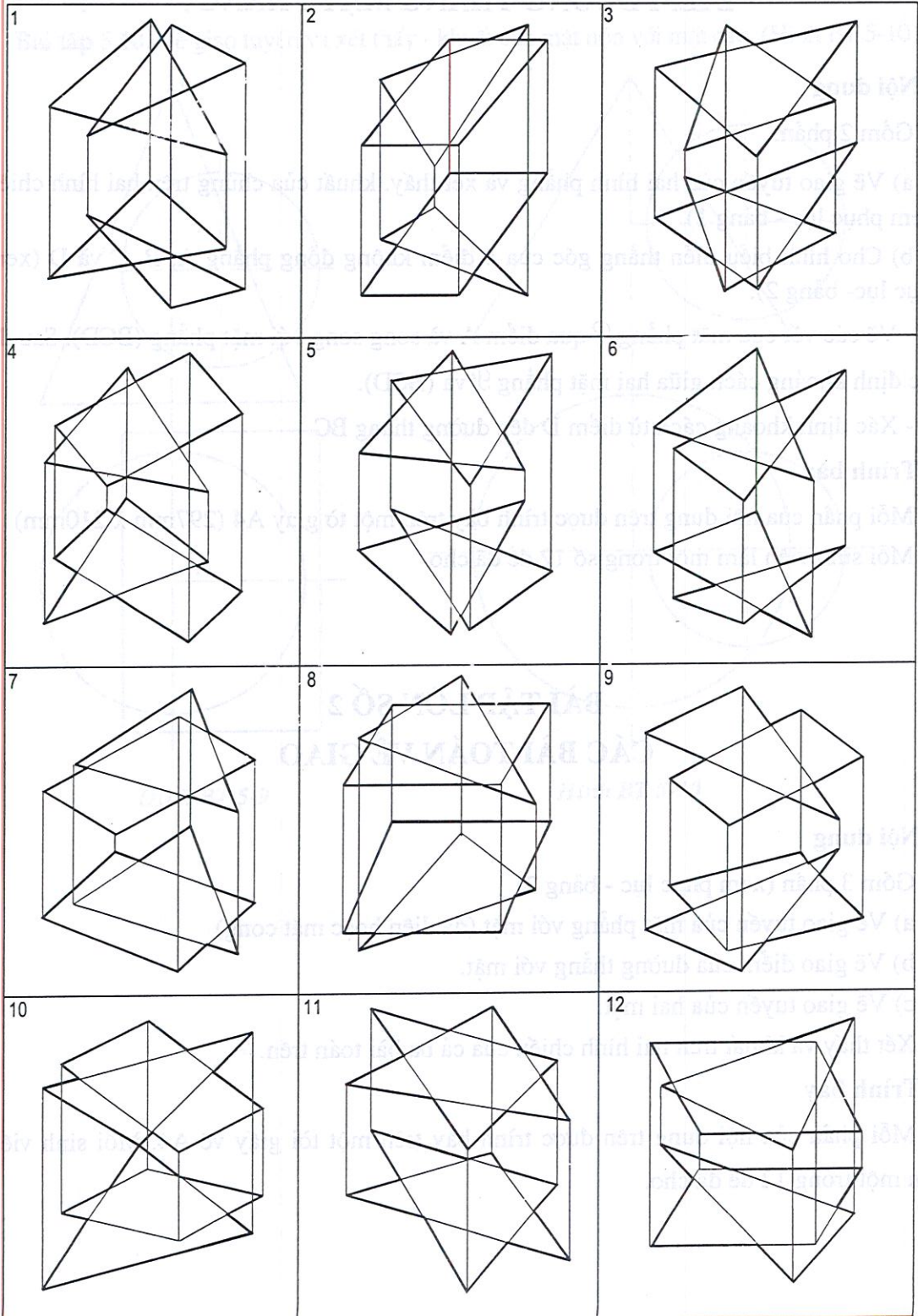
Hình BT 5-8a

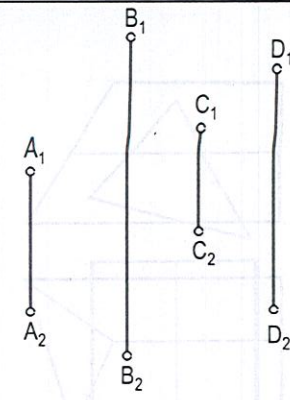
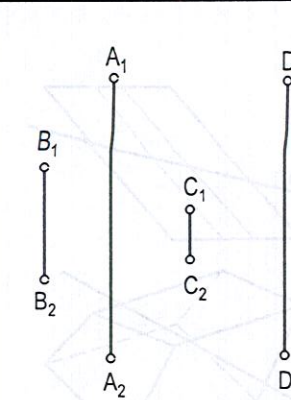
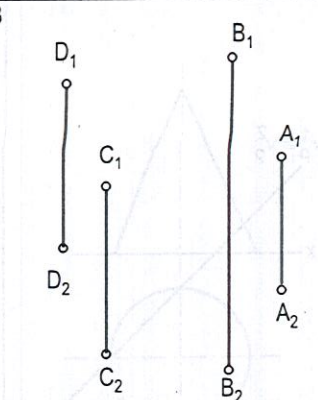
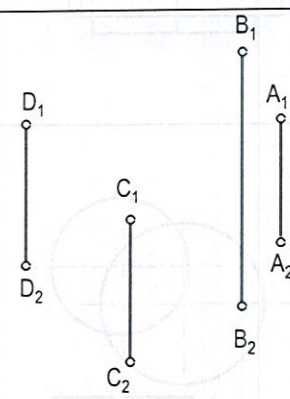
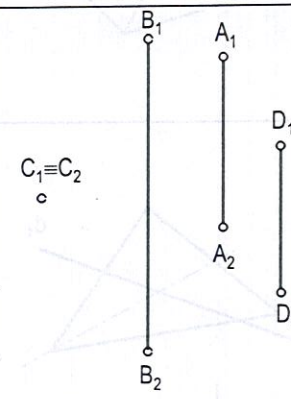
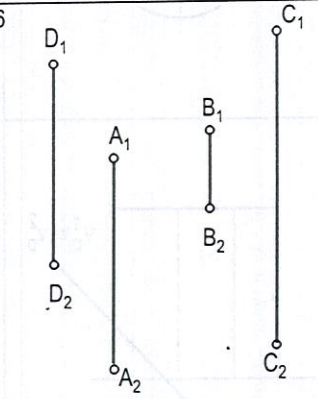
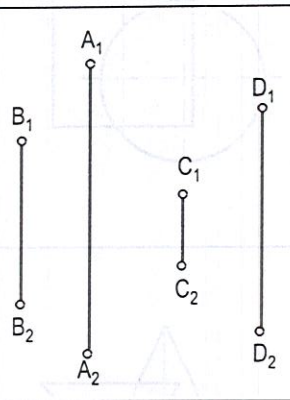
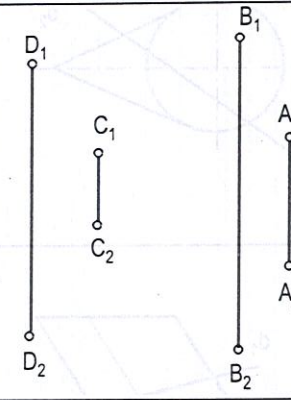
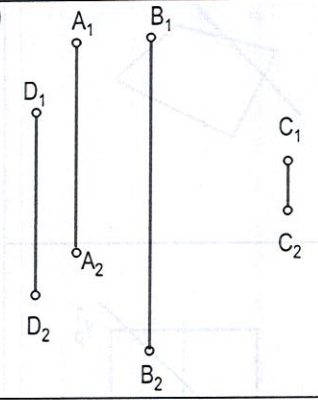
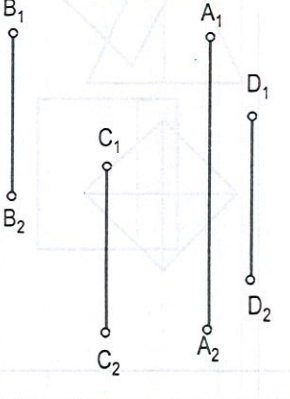
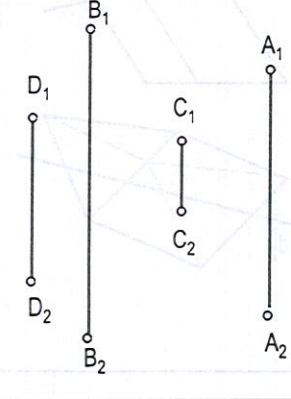
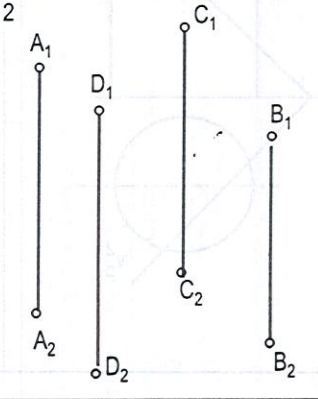


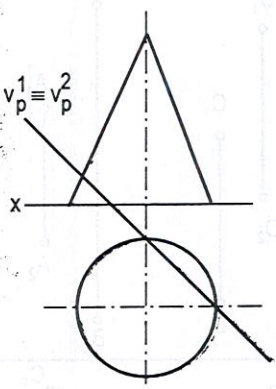
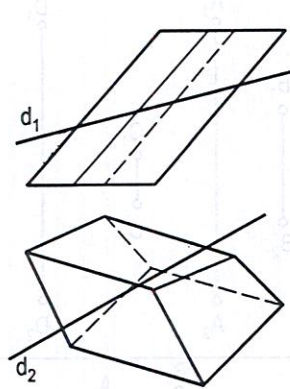
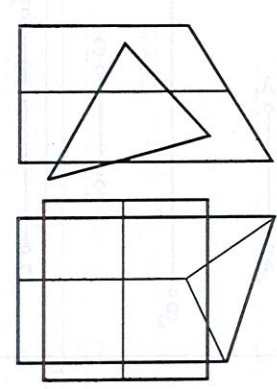
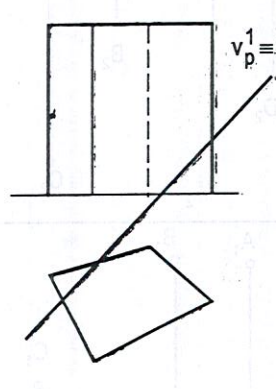
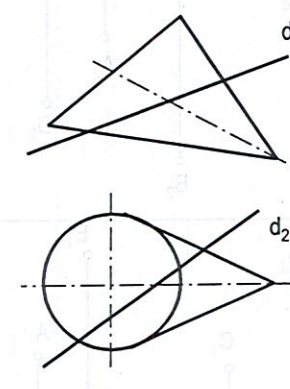
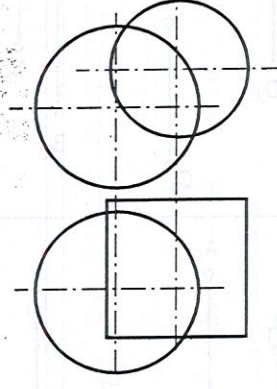
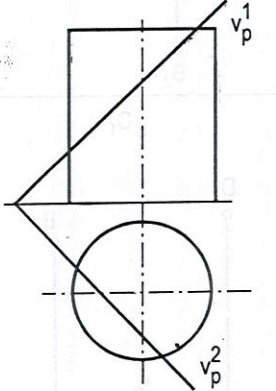
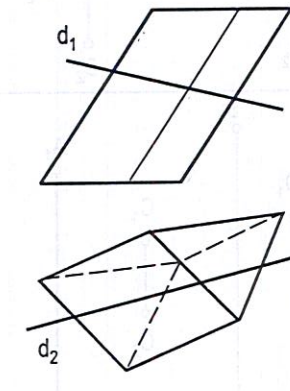
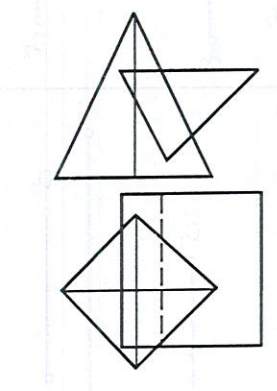
Hình BT 5-8b

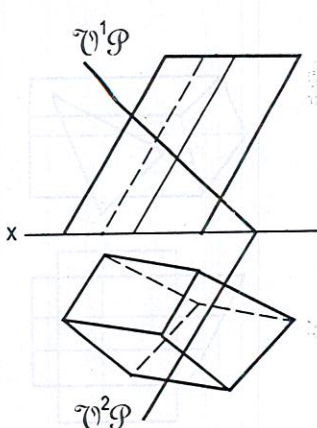
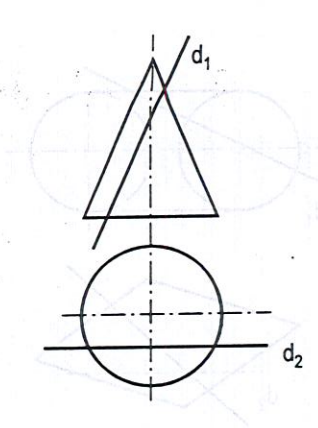
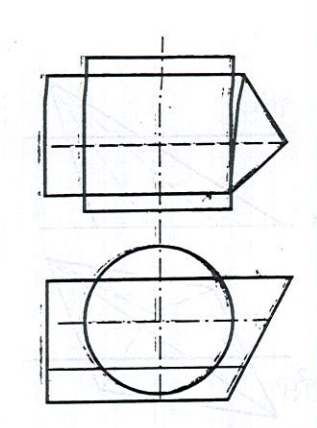
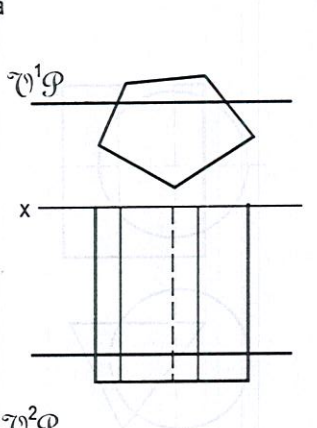
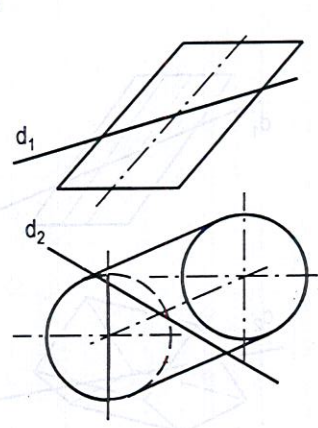
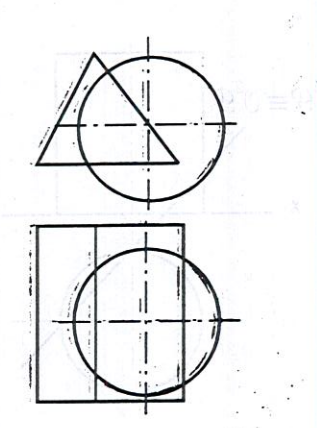
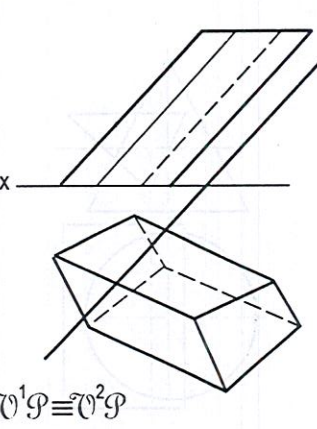
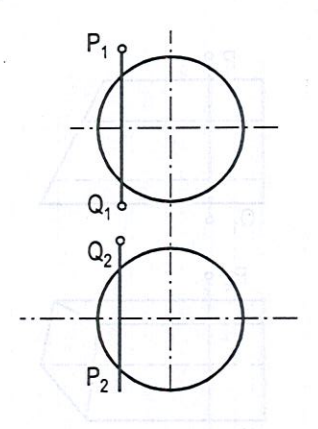
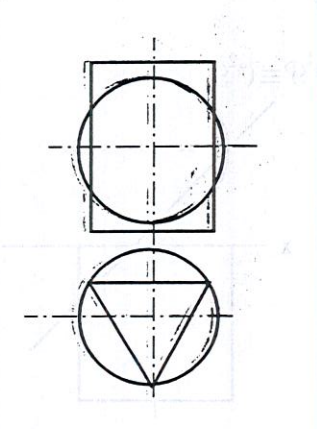
PHỤ LỤC

Bảng 1



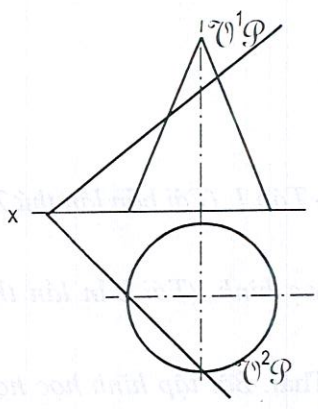
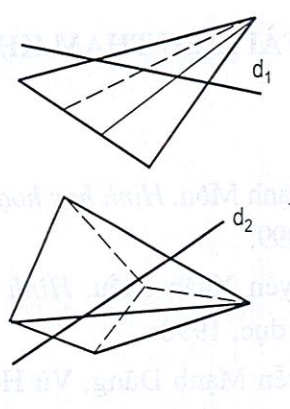
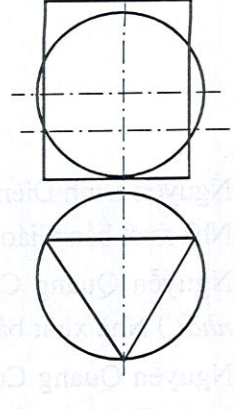
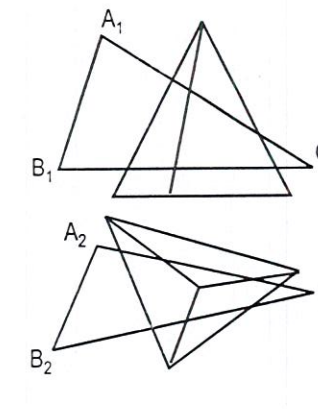
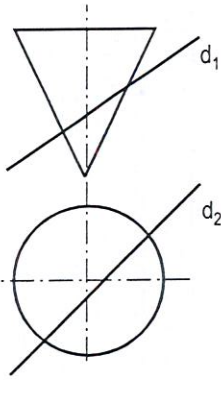
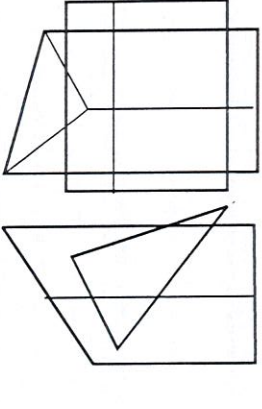
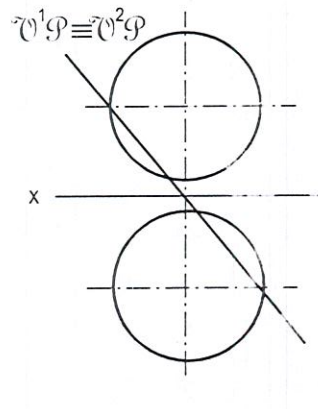
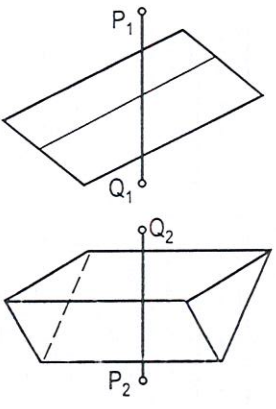
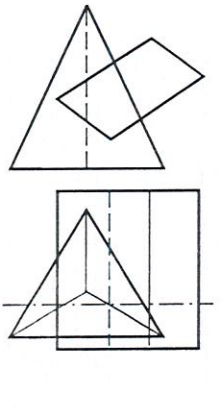
1 	2 	3 
4 	5 	6 
7 	8 	9 
10 	11 	12 

1a 	1b 	1c 
2a 	2b 	2c 
3a 	3b 	3c 

4a 	4b 	4c 
5a 	5b 	5c 
6a  $V^1P \equiv V^2P$	6b 	6c 

7a	7b	7c
8a	8b	8c
9a	9b	9c

Bảng 3 (tiếp)

10a 	10b 	10c 
11a 	11b 	11c 
12a 	12b 	12c 

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Đình Điện, Đỗ Mạnh Môn. *Hình học hoạ hình - Tập 1. (Tái bản lần thứ 7).* Nhà xuất bản Giáo dục, 1999.
2. Nguyễn Quang Cự, Nguyễn Xuân Kiều. *Hình học hoạ hình. (Tái bản lần thứ nhất.)* Nhà xuất bản Giáo dục, 1998
3. Nguyễn Quang Cự, Nguyễn Mạnh Dũng, Vũ Hoàng Thái. *Bài tập hình học hoạ hình. (Tái bản lần thứ 2).* Nhà xuất bản Giáo dục, 1998.

MỤC LỤC

Lời nói đầu	3
Các ký hiệu dùng trong sách	4
Mở đầu: Phép chiếu	5
§1. Các phép chiếu	5
§2. Ứng dụng của các phép chiếu	9
Chương 1: Biểu diễn các yếu tố hình học cơ bản	11
§1. Biểu diễn điểm	12
§2. Biểu diễn đường thẳng	15
§3. Biểu diễn mặt phẳng	23
Chương 2: Các bài toán cơ bản	30
§1. Những bài toán về vị trí	30
§2. Những bài toán về lượng	36
Chương 3: Các phép biến đổi hình chiếu	46
§1. Phép thay mặt phẳng hình chiếu	46
§2. Quay một hình phẳng quanh đường bằng hay đường mặt của nó.	52
Chương 4: Đa diện	55
§1. Biểu diễn đa diện	55
§2. Giao tuyến của mặt phẳng với đa diện.	57
§3. Giao điểm của đường thẳng với đa diện	59
§4. Giao tuyến hai đa diện	61
§5. Khai triển đa diện	63
Chương 5: Mặt cong	65
§1. Biểu diễn mặt cong	65
§2. Giao tuyến của mặt phẳng và mặt cong	68
§3. Giao của đường thẳng với mặt cong	71
§4. Giao của đa diện với mặt cong	73
§5. Giao tuyến của hai mặt cong	75
§6. Khai triển mặt cong	76
Bài tập chương 1	78
Bài tập chương 2	81
Bài tập chương 3	85
Bài tập chương 4	88
Bài tập chương 5	91
Bài tập lớn số 1. Điểm Đường thẳng mặt phẳng	95
Bài tập lớn số 2. Các bài toán về giao	95
Phụ lục	96
Tài liệu tham khảo	102

HÌNH HỌC HỌA HÌNH

PHƯƠNG PHÁP HÌNH CHIẾU THẲNG GÓC

(Tái bản)

Chịu trách nhiệm xuất bản :

TRINH XUÂN SƠN

Biên tập : **VŨ HỒNG THANH**
Chế bản : **TRẦN THU HOÀI**
Sửa bản in : **VŨ HỒNG THANH**
Trình bày bìa : **VŨ BÌNH MINH**

In 500 cuốn khổ 19 x 27cm tại Xưởng in Nhà xuất bản Xây dựng. Giấy chấp nhận đăng ký kế hoạch xuất bản số 18-2012/CXB/657-160/XD ngày 29-12-2011. Quyết định xuất bản số 223/QĐ-XBXD ngày 7-8-2012. In xong nộp lưu chiểu tháng 8-2012.